https://roter-faden-physik.de/

Komplexe Zahlen, Herleitung der Schrödingergleichung

von *Dr. Ortwin Fromm, Evangelische Schule Frohnau, Berlin.* Vorgetragen am 5. und 12. 6. 2018

GLIEDERUNG

I) Einführung: Entwicklung des Zahlbegriffes.
   Wie kommt man zu den komplexen Zahlen?

II) Anwendung
   1) .. im Bereich der Mathematik
   2) .. in der Physik: Herleitung der komplexen Schrödinger Gleichung der Quantenmechanik

I) Zahlen

A) Überblick

1) Beim Zählen geht es um die *Beurteilung* von Mengen.
Ein prähistorischer Hirte konnte auf einen Schlag die Vollständigkeit seiner Herde erkennen
Erst als die Herden größer wurden, ging das nicht mehr: Die Tiere wurden nun durch eine Verengung getrieben und es hieß +1 +1 +1 …. = 1000
Das *Zählen* und die *natürlichen Zahlen* waren geboren.
Quintessenz: Städte und Staaten konnten verwaltet und versorgt werden.

2) Dann kamen Geldwirtschaft und Fernhandel.
Fernhandel ist betrugsfrei nur mit doppelter Buchführung möglich. Ohne Kontrolle der Ein- und Ausgänge betrügt dich der anonyme Geschäftspartner, die Firma geht pleite. Für die Buchführung brauchst du positive und negative Zahlen, sowie die null für das ausgeglichene Konto: Du brauchst die *ganzen Zahlen*.
Quintessenz: Die ganzen Zahlen ermöglichten die erste Globalisierung.

3) Anspruchsvolle Bauwerke und Befestigungsanlage, meist auf schiefem Untergrund mit geneigten und gewölbten Wänden kannst du nicht mit gleichförmigen Quadern bauen.
Du brauchst gebrochene Steine: halbe, viertel, achtel usw… : Du brauchst *Bruchzahlen*.

Pythagoras entdeckte, dass die Töne der Harmonien in ganzzahligen Verhältnissen stehen. Auch im Umlauf der Planeten entdeckte er diese Harmonien. Nach Pythagoras sollten alle Dinge der Welt in solch harmonisch rational gebrochenen Verhältnissen stehen.

Doch Pythagoras scheiterte bereits an einem simplen geometrischen Problem: Die Diagonale eines Quadrates steht in *keinem* Bruchverhältnis zur Kantenlänge *a*, sie ist $\sqrt{2}$ mal länger als *a*. $\sqrt{2}$ ist irrational. Es gibt keinen Bruch, der $\sqrt{2}$ ergibt:

Nimm an, $\sqrt{2}$ wäre ein Bruch. Dann hätte man $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ bzw. $2 = \frac{a^2}{b^2}$ bzw. $a^2 = 2 \cdot b^2$.

Probiere im Kopf, ob sich ganze Zahlen *a* und *b* finden lassen.

$b = 1$	$b = 2$	$b = 3$	$b = 4$	$b = 5$
$2 \cdot b^2 = 2$	$2 \cdot b^2 = 8$	$2 \cdot b^2 = 18$	$2 \cdot b^2 = 32$	$2 \cdot b^2 = 50$
Nie kommt eine Quadratzahl heraus.				

Quintessenz: Keine Dombauhütte wäre ohne Bruchzahlen ausgekommen.
Die wunderbaren Bauwerke des Mittelalters gäbe es ohne die Bruchzahlen nicht.
Doch die Bruchzahlen zeigen schon aus sich selbst heraus, dass sie *unvollständig* sind.

4) Die Diagonale des Quadrates existiert, doch der Zahlenraum reicht nicht aus, sie zu beschreiben. Wieder muss der Zahlenraum erweitert werden. Die Erweiterung sind die reellen Zahlen. Meist lassen sie sich nur symbolisch schreiben, wie z.B. $\sqrt{2}$. Die Dezimaldarstellung hat unendlich viele Ziffern. Das reicht alles Papier der Welt nicht aus. Die Berechnung

erfolgt über den Limes einer unendlichen Folge. Der Limes ist aber die Grundlage der Differenzial- und Integralrechnung.
Quintessenz: Ohne reelle Zahlen keine Differenzial- und Integralrechnung. Ohne diese Rechnungen kein Verständnis der Bewegung, der Elektrizität, des Magnetismus. Stillstand im Mittelalter. Ohne reelle Zahlen, keine moderne technische Welt

5) Als letztes kommen die komplexen Zahlen, unser heutiges Thema. Wir werden zeigen, dass die Grundgleichung der Quantentheorie, die Schrödinger Gleichung, mit reellen Zahlen *nicht* zu kriegen ist. Für die Schrödinger Gleichung *braucht* man komplexe Zahlen.
Quintessenz: Nur durch die komplexen Zahlen ist unsere heutige Alltagswelt mit Computern, Lasern usw. möglich, denn all diese Geräte basieren auf Teilen, die nach den Regeln der Quantentheorie funktionieren und diese existiert halt *nur* mit komplexen Zahlen.

B) Was sind Zahlen?

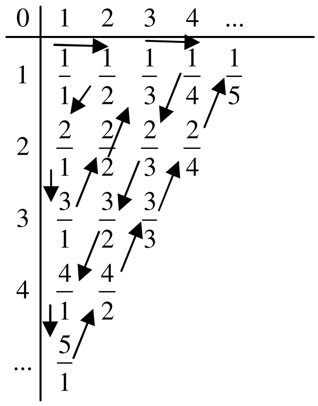
1) Ausgangspunkt sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ... \}$ mit …
   a) Addition $+$
   b) Multiplikation $\bullet$ als wiederholter Addition $3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5$
   c) Potenzierung *hoch* als wiederholter Multiplikation $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
   - wiederholtes Potenzieren bringt nichts: $\left(\left((5)^4\right)^4\right)^4 = 5^{4 \cdot 4 \cdot 4} = 5^{64}$ ist nur eine Potenz.
   d) Dann gibt es noch die Anordnungszeichen $< = >$.

2) Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
Sie ergeben sich aus der Umkehrfrage der Addition:
Addition $5+3=\boxed{?} \;\Rightarrow\; 5+3=\boxed{8}$
Umkehrung $5+\boxed{?}=8 \;\Rightarrow\; 5+\boxed{3}=8$ hier klappt die Umkehrung,
aber $5+\boxed{?}=3 \;\Rightarrow\;$ keine Lösung in $\mathbb{N}$
Die ganzen Zahlen aus der Zahlenmenge $\mathbb{Z}$ machen solche Gleichung lösbar: $5+\boxed{-2}=3$

3) Rationale Zahlen = Bruchzahlen $\mathbb{Q}$
Sie ergeben sich aus der Umkehrfrage der Multiplikation:
Multiplikation $4 \bullet 3=\boxed{?} \;\Rightarrow\; 4 \bullet 3=\boxed{12}$
Umkehrung $4 \bullet \boxed{?}=12 \;\Rightarrow\; 4 \bullet \boxed{3}=12$ hier klappt die Umkehrung,
aber $4 \bullet \boxed{?}=9 \;\Rightarrow\;$ keine Lösung in $\mathbb{Z}$

Die rationalen Zahlen aus der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ machen solche Gleichung lösbar: $4 \bullet \boxed{\frac{9}{4}} = 9$.

Frage: Wieviele rationale Zahlen gibt es?



Durch diese Anordnung entsteht die Folge

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cancel{\frac{2}{2}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \cancel{\frac{4}{2}}, \cancel{\frac{3}{3}}, \cancel{\frac{2}{4}}, \frac{1}{5}, ...$

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11...

welche *alle* denkbaren Bruchzahlen enthält. Wiederholungen werden weg gestrichen. Der Trick zeigt das Unglaubliche:
Obwohl $\mathbb{Q}$ den ganzen Zahlenstrahl zu bedecken scheint, beinhaltet $\mathbb{Q}$ doch nicht mehr Zahlen als $\mathbb{N}$

Das zeigt von neuem, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ unvollständig ist.

4) <u>Reelle Zahlen</u> $\mathbb{R}$

Sie ergeben sich aus der <u>Umkehrfrage</u> des <u>Potenzierens von positiven Zahlen</u>:

Potenzieren $\quad 3^2 = \boxed{?} \quad \Rightarrow \quad 3^2 = \boxed{9}$

Umkehrung $\quad \boxed{?}^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{3}^2 = 9$ hier klappt die Umkehrung,

aber $\quad \boxed{?}^2 = 5 \quad \Rightarrow$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$

Die reellen Zahlen aus der Zahlenmenge $\mathbb{R}$ machen solche Gleichung lösbar: $\boxed{\sqrt{5}}^2 = 5$.

Die reellen Zahlen basieren auf der Limesbildung von unendlichen Folgen.
Das zeigen wir am Beispiel $\sqrt{5}$ mit dem Heron-Verfahren auf dem Taschenrechner:

5 $\boxed{\text{STO}}$ A

1 $\boxed{=}$

2 $\boxed{A}$ / $\left(\boxed{A} / \boxed{\text{Ans}} + \boxed{\text{Ans}}\right)\boxed{=}$ …..

Erst die reellen Zahlen zeigen uns, was wirklich Zahlen sind: Zahlen müssen bei die Grundrechenarten $+$, $\bullet$, *hoch* funktionieren und auch noch die Umkehrungen $-$, $\div$, $\sqrt{\ }$, *log* können.

5) <u>Imaginäre Zahlen</u>

Sie ergeben sich aus der <u>Umkehrfrage</u> des <u>Potenzierens von negativen Zahlen</u>:

Potenzieren $\quad 2^2 = \boxed{?} \quad \Rightarrow \quad 2^2 = \boxed{4}$

Umkehrung $\quad \boxed{?}^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2}^2 = 4$ hier klappt die Umkehrung,

aber $\quad \boxed{?}^2 = -4 \quad \Rightarrow$ keine Lösung in $\mathbb{R}$

Die imaginären Zahlen machen solche Gleichung lösbar: $\boxed{\sqrt{-4}}^2 = -4$.

Was bedeutet das?
Auch hier gilt $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Daher hat man

z.B.: $\quad \underline{\underline{\sqrt{-4}}} = \sqrt{(-1) \cdot 4} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{(-1)} \cdot 2 = \underline{\underline{2 \cdot \sqrt{-1}}}$

Ebenso ist $\quad \underline{\underline{\sqrt{-9}}} = \underline{\underline{3 \cdot \sqrt{-1}}}$ oder $\underline{\underline{\sqrt{-5}}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} \approx \underline{\underline{2{,}236 \cdot \sqrt{-1}}}$

Auch, wenn wir noch nicht wissen, was die Wurzeln aus negativen Zahlen sind, so sehen wir doch: Sie sind *immer* das Produkt einer „ganz normalen" reellen Zahl mit $\sqrt{-1}$.

$\boxed{\sqrt{-1}}$ ist die Grundeinheit der imaginären Zahlen, $\boxed{\sqrt{-1}}$ ist sozusagen die „Birne"

während $\boxed{1}$ die Grundeinheit der reellen Zahlen, der „Apfel" ist.

Wir haben jetzt zwei Zahlenstrahlen: einen für Äpfel und einen für Birnen:

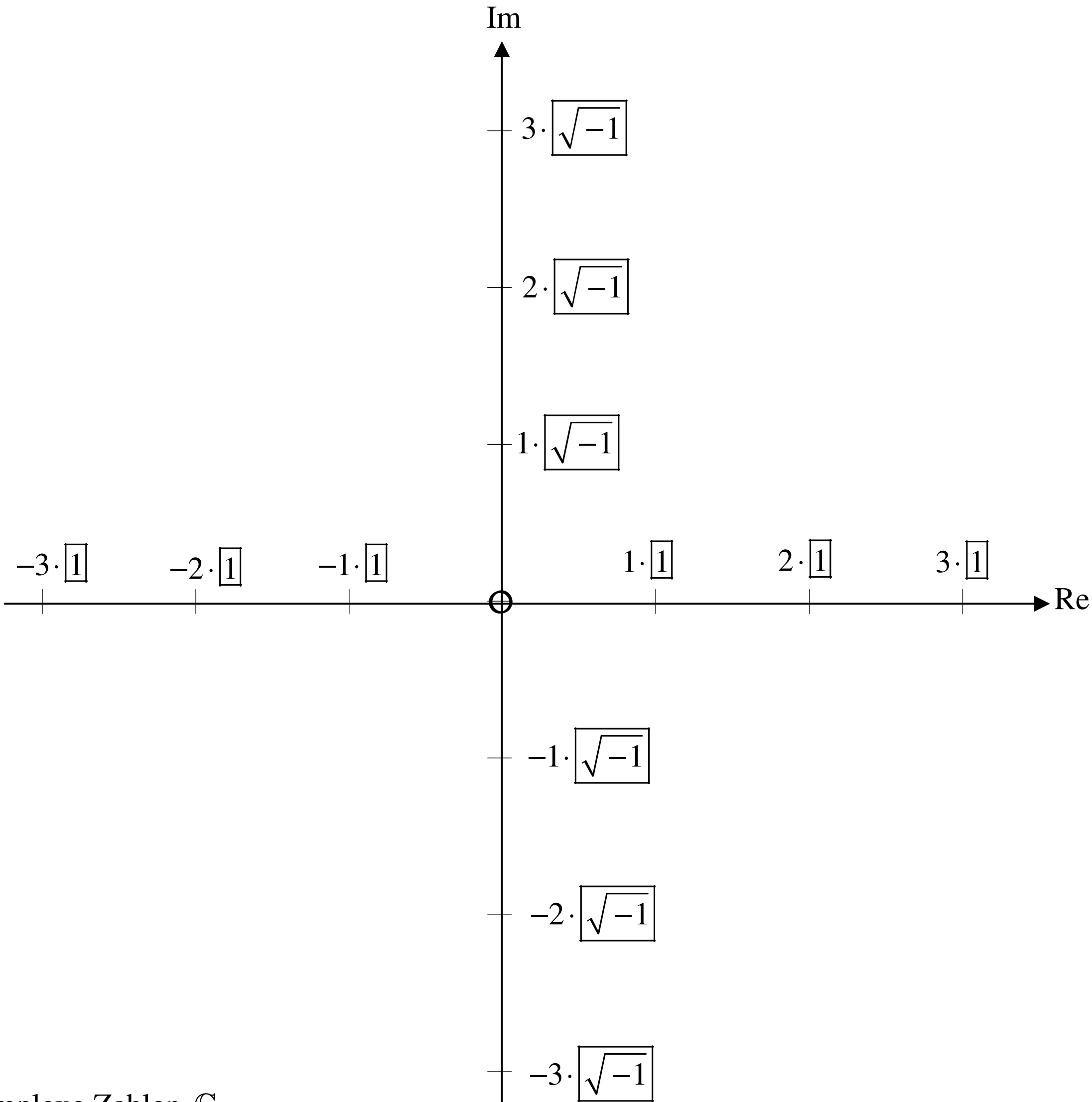
$-3 \cdot \boxed{1} \quad -2 \cdot \boxed{1} \quad -1 \cdot \boxed{1} \quad 0 \cdot \boxed{1} = 0 \quad 1 \cdot \boxed{1} \quad 2 \cdot \boxed{1} \quad 3 \cdot \boxed{1}$ $\;\rightarrow$ Re

$-3 \cdot \boxed{\sqrt{-1}} \quad -2 \cdot \boxed{\sqrt{-1}} \quad -1 \cdot \boxed{\sqrt{-1}} \quad 0 \cdot \boxed{\sqrt{-1}} = 0 \quad 1 \cdot \boxed{\sqrt{-1}} \quad 2 \cdot \boxed{\sqrt{-1}} \quad 3 \cdot \boxed{\sqrt{-1}}$ $\;\rightarrow$ Im

So wie Äpfel nichts mit Birnen zu tun haben, haben auch reelle Zahlen nichts mit imaginären Zahlen zu tun. Imaginäre Zahlen sind für die reellen Zahlen einfach nur $\boxed{\text{Error}}$.

Zwar gibt es nicht unendlich viele unterschiedliche $\boxed{\text{Errors}}$, sondern nur einen einzigen, auf den sich alle andere $\boxed{\text{Errors}}$ zurück führen lassen. Dennoch, die Welten der reellen und imaginären Zahlen sind grundverschieden.

Aber: Es gibt ein „Wurmloch“ $0\cdot\boxed{1}$ ist *null* und $0\cdot\boxed{\sqrt{-1}}$ ist auch *null*, denn die null gibt es nur einmal. Dadurch entsteht folgendes Achsenkreuz, dessen Flächen *noch* leer sind.



6) Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Sie ergeben sich z.B. beim *Zerlegen* von Zahlen, dass heißt, beim Satz des $\boxed{\text{Vieta rückwärts}}$

Bsp 1) Gesucht sind zwei Zahlen a und b, deren Summe 7 und deren Produkt 12 ergibt.
Also $a+b=7$ und $a\cdot b=12$. Ergebnis: $a=.....$, $b=.....$

Bsp 2) Gesucht sind zwei Zahlen a und b, deren Summe 13 und deren Produkt 30 ergibt.
Also $a+b=13$ und $a\cdot b=30$.
Lsg.: 30 lässt sich schreiben als $30=1\cdot 30$; $30=2\cdot 15$; $30=3\cdot 10$; $30=5\cdot 6$.
Bei der Zerlegung $30=3\cdot 10$ klappt es.

Bsp 3) Gesucht sind zwei Zahlen a und b, deren Summe 10 und deren Produkt 26 ergibt.
Also $a+b=10$ und $a\cdot b=26$.
Lsg.: 26 hat lässt sich schreiben als $26=1\cdot 26$ und $26=2\cdot 13$. Beides klappt nicht.
Doch es gibt eine Lösung: $a=5+\sqrt{-1}$; $b=5-\sqrt{-1}$.

Beweis: $a+b=\left(5+\sqrt{-1}\right)+\left(5-\sqrt{-1}\right)=\underline{\underline{10}}$

$$a\cdot b=\left(5+\sqrt{-1}\right)\cdot\left(5-\sqrt{-1}\right)=25-5\cdot\sqrt{-1}+5\cdot\sqrt{-1}-\left(\sqrt{-1}\right)^2=25-(-1)=\underline{\underline{26}}$$

Aufgabe: $a+b=6$ und $a\cdot b=13$. Zeichne die Lösungen in die komplexe Zahlenebene ein.

II) Anwendung

A) Innermathematische Anwendung

Abkürzung: Man schreibt $\sqrt{-1} = i$ und hat dann $\underline{\underline{i^2 = -1\ ,\ i^3 = -i\ ,\ i^4 = 1}}$

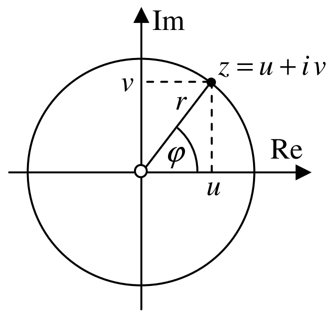
Mit komplexen Zahlen lassen sich alle sieben Grundrechenarten ausführen.
Jede Gleichung der Form $c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + ... + c_1 z + c_0 = 0$ mit beliebigen komplexwertigen (oder reellen) Koeffizienten lässt sich im Komplexen (ohne „weiteren $\boxed{\text{Error}}$ „) lösen.
Einzig, von den Anordnungszeichen < = > bleibt nur = übrig.
Mit der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ wird so gerechnet, als wäre *i* ein Buchstabe.
Man kann beliebige andere Potenzen bilden. Bei ganzzahlige Potenzen von i gilt
$i^2 = -1\ ,\ i^3 = -i\ ,\ i^4 = 1\ ,\ i^5 = i\ ,\ i^6 = -1\ , ...\ .$
Die kartesische Darstellg einer komplexen Zahl lautet $z = u + i\,v$ mit $\mathrm{Re}(z) = u$; $\mathrm{Im}(z) = v$
$z_1 = u + i\,v$ und $z_2 = u - i\,v$ heißen konjugiert komplex zueinander. Man schreibt $z_2 = z_1^*$.

a) Die vier Grundrechenarten mit komplexen Zahlen am Beispiel

$$z_1 = 4 - 2i\ ;\quad z_1 = 3 + i\ .\quad z_1 + z_2 = 7 - i\quad ;\quad z_1 - z_2 = 1 - 3i\ ;\ z_1 \cdot z_2 = 14 - 2i\ ;\ \frac{z_1}{z_2} = 1 - i$$

b) Polardarstellung einer komplexen Zahl

Man erkennt: $\cos\varphi = u/r$, $\sin\varphi = v/r$ und $r = \sqrt{u^2 + v^2}$. Hiermit rechnet man von kartesischen $z = u + i\,v$ auf polar r und φ um.
Polardarstellung einer komplexen Zahl: $\boxed{z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)}$
Bsp.: $r = 2$; $\varphi = 30° = \pi/6$. $\Rightarrow \underline{\underline{z = \sqrt{3} + i}}$
Bsp.: $z = 4 + 3i$. $\Rightarrow \underline{\underline{r = 5\ ;\ \varphi = 36{,}87°}}$



c) Die Exponentialfunktion im Komplexen

Die Potenzen von *e* lassen sich durch die Reihe $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ...$
berechnen. Beispiel: $e^2 \approx 1 + 2/1! + 2\wedge 2/2! + 2\wedge 3/3! + 2\wedge 4/4! + 2\wedge 5/5! = \underline{\underline{7{,}267}}$.

Ähnliches gilt auch für $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$ und $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$

Bsp. $\sin 2 \approx\ 2\wedge 1/1!\ -\ 2\wedge 3/3!\ +\ 2\wedge 5/5! = \underline{\underline{0{,}933}}$. „Exakt“: $\sin 2 = 0{,}9093$

$\cos 2 \approx 1 - 2\wedge 2/2! + 2\wedge 4/4! + 2\wedge 6/6! = \underline{\underline{-0{,}422}}$. „Exakt“: $\cos 2 = -0{,}4161$

Jetzt bilden wir $e^{i\cdot\varphi}$, setzen also in der Entwicklung der *e*-Reihe $x = i \cdot \varphi$ ein und beachten $i^2 = -1\ ,\ i^3 = -i\ ,\ i^4 = 1\ ,\ i^5 = i\ ,\ i^6 = -1\ , ...$:

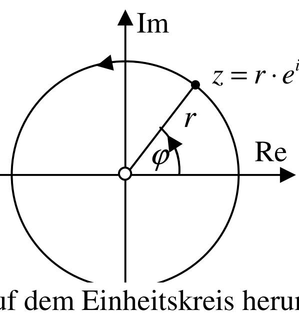
$$e^{i\cdot\varphi} = 1 + \frac{i\cdot\varphi}{1!} + \frac{(i\cdot\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\cdot\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\cdot\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\cdot\varphi)^5}{5!} + .. = 1 + i \cdot \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - i \cdot \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i \cdot \frac{\varphi^5}{5!} + ..$$

$$e^{i\cdot\varphi} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - ...\right) + i \cdot \left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + ..\right).$$

$$= \quad \cos\varphi \quad + \quad i \cdot \ \sin\varphi\ .$$

Wegen $z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$, gewinnen wir eine noch wichtigere Polardarstellung der komplexen Zahlen: $\boxed{z = r \cdot e^{i\cdot\varphi}}$

Bei festem Radius r dreht sich z im Kreis herum. Ist $r = 1$, so dreht sich z mit φ auf dem Einheitskreis herum

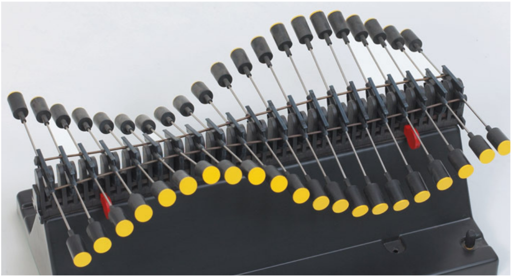


B) Herleitung der Schrödinger Gleichung

a) Dualität (Doppelnatur) des Lichtes.

Um 1670 entstanden zwei konkurrierende Lichttheorien:
Newton sah das Licht als Strom von *Teilchen* an. *Huygens* interpretierte das Licht als *Welle*. Die Genauigkeit der Messtechnik reichte damals bei weitem nicht für eine Entscheidung. Mittels der Maxwellschen Gleichungen des Elektromagnetismus zeigte sich dann gegen 1880, dass Licht eine elektromagnetische *Welle* ist. Huygens schien also Recht zu haben. Doch es gab Fehler: Fällt Licht auf eine Metallplatte, so treten Elektronen aus. Das nutzt man beim Belichtungsmesser. Die Maxwellschen Gleichungen liefern hier aber falsche Vorhersagen. Das Rätsel löste Einstein: Nur wenn das Licht neben dem Wellencharakter auch eine Teilchennatur besitzt, wird alles verständlich. Damit waren das Photon und die Doppelnatur des Lichts geboren.

b) Licht als Welle



Die Auslenkung y einer Welle ist eine Funktion von Ort und Zeit. Betrachtet man eine feste Stelle x, so schwingt es dort *sinus*förmig mit der Schwingungsdauer T auf und ab. $\sin(0)$ ist bekanntlich gleich null. Nach Ablauf von T muss dann wieder null heraus kommen. Das wird durch $\sin\frac{2\pi \cdot t}{T}$ geleistet, denn für $t = T$ entsteht $\sin\frac{2\pi \cdot \cancel{T}}{\cancel{T}} = \sin 2\pi = 0$. ✓ Macht man zum festen Zeitpunkt t ein Foto von der gesamten Wellenmaschine, so sieht man den Graphen einer Sinusfunktion bzgl. x. Die Wiederholung beginnt hier nach einer Wellenlänge λ. Wieder muss null herauskommen, wenn wir von der Anfangsstelle $x = 0$ nun um die Strecke λ weitergehen. Daher lautet die x-Abhängigkeit der Auslenkung entsprechend $\sin\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}$, denn sowohl für $x = 0$ als auch für $x = \lambda$ liefert der Ausdruck null. Jetzt wird beides kombiniert: Das Ergebnis lautet $y(x,t) = \sin\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda} - \frac{2\pi \cdot t}{T}\right)$. Warum? Verfolge eine Stelle, an welcher die Auslenkung gerade gleich null ist. Diese Stelle liegt dort vor, wo z.B. $\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda} - \frac{2\pi \cdot t}{T}\right) = 0$ gilt. Umstellen nach x: $\frac{\cancel{2\pi} \cdot x}{\lambda} = \frac{\cancel{2\pi} \cdot t}{T} \Big| \cdot \lambda$ ergibt $x = \frac{\lambda}{T} \cdot t$. Setze $\frac{\lambda}{T} = v$ und du siehst: Die Nullstelle wandert mit der Geschwindigkeit $v = \lambda / T$ nach rechts. Die Wellenmaschine liefert ein Modell für die Lichtwelle. Entsprechend setzen wir für v die Lichtgeschwindigkeit c ein und erhalten $\boxed{\frac{\lambda}{T} = c}$. Die Lichtgeschwindigkeit c ist konstant. Beim Licht ist also ist das Verhältnis von Wellenlänge λ und Schwingungsdauer T konstant.

c) Wellengleichung des Lichtes

In der Physik ist es immer so, dass das beobachtete Ergebnis, hier die Wellenfunktion $y(x,t) = \sin\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda} - \frac{2\pi \cdot t}{T}\right)$, aus einer *Bestimmungsgleichung* gewonnen werden muss.
Die Bestimmungsgleichung heißt hier „Wellengleichung“. Wie findet man die?
Wir wissen, dass der Sinus, zweifach abgeleitet, sich selbst reproduziert. Also leiten wir

zweimal ab nach x und bilden y''. Dabei gilt t als Konstante. Dann leiten wir zweimal nach t ab und bilden $\ddot{y}$, dabei zählt x als Konstante. Anschließend wird verglichen.

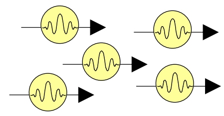
$$y' = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda} - \frac{2\pi \cdot t}{T}\right) \quad ; \quad y'' = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda} - \frac{2\pi \cdot t}{T}\right) = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot y$$

$$\dot{y} = \frac{-2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda} - \frac{2\pi \cdot t}{T}\right) \quad ; \quad \ddot{y} = -\left(\frac{-2\pi}{T}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda} - \frac{2\pi \cdot t}{T}\right) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot y\,.$$

Vergleich: $\frac{\ddot{y}}{y''} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi^2} = \frac{\lambda^2}{T^2}$. Der Quotient $\boxed{\frac{\lambda^2}{T^2} = c^2}$ ist für die Lichtwelle konstant.

Somit haben wir die Wellengleichung der Lichtwelle gefunden. Sie lautet: $\boxed{\ddot{y} = c^2 \cdot y''}$

d) Licht als Teilchen



Von Sonnenbrand wissen wir, dass die Bestrahlung mit Licht Schäden hervorrufen kann. Bestrahlt man Metall mit Licht, so können sogar Elektronen heraus geschossen werden. Einstein fand heraus, dass die sog. Photoemission nur durch eine Teilchenvorstellung des Lichtes richtig erklärbar ist. Demnach besteht Licht mit der Schwingungsdauer T aus einem Schwarm von Lichtteilen. Einstein ermittelte, dass sie alle *jeweils* die winzige Energie $W = h/T$ besitzen. Die Naturkonstante h heißt Plancksches Wirkungsquantum. Bei großer Schwingungsdauer sind die Photonen energiearm, während z.B. die Photonen des kurzwelligen UV-Lichtes „scharfe Geschosse" sind. Einstein hatte im Rahmen der Relativitätstheorie noch eine zweite Energiegleichung gefunden, nämlich $E = m \cdot c^2$ bzw. $W = m \cdot c^2$. Gleichsetzen ergibt $\frac{h}{T} = mc^2$.

Ersetzt man ein c durch $c = \frac{\lambda}{T}$ und belässt das andere, so folgt $\frac{h}{T} = mc \cdot \frac{\lambda}{T} \;\Big|\; \cdot T$.

Das ergibt $h = mc \cdot \lambda$, bzw. $\boxed{\lambda = \frac{h}{mc}}$. Photonen mit großer Masse bzw. Energie, haben somit kleine Wellenlängen. Die Photonen sind *Teilchen*. Sie besitzen daher nicht nur eine Masse, sondern auch einen Impuls = Masse × Geschwindigkeit $p = m \cdot c$. Aus $W = m \cdot c^2$ folgt dann $W = m \cdot c^2 = m \cdot c \cdot c$ also $W = p \cdot c$. Daher gilt für Lichtteilchen $W \sim p$.

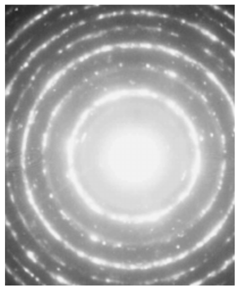
e) Doppelnatur der Materie

Während man beim Licht lange um die richtige Auffassung stritt, schien bei der Materie gar kein Zweifel daran zu bestehen, dass diese aus Teilchen besteht. Wie sollte denn die Materie auch aus Wellen bestehen können? Erst Jahre nachdem die (kuriose) Doppelnatur des Lichtes nicht mehr bestreitbar war, kam De Broglie auf die Idee, dass das, was für's Licht gilt, auch für die Materie gelten sollte. Er griff die Licht- Gleichungen $\lambda = \frac{h}{mc}$ auf und wandelte sie um in $\lambda = \frac{h}{mv}$, denn Materieteilchen bewegen sich nicht mit Lichtgeschwindigkeit c, sondern mit v. Umstellen: $\boxed{v = \frac{h}{m\lambda}}$.

Das *Photon* wird gesteuert durch die *beiden* Naturkonstanten c und h und durch die *drei* Variablen λ, T und m, denn m ist wegen $m \cdot c^2 = W = h/T$ beim Photon variabel.

Beim *Elektron* (z.B.) ist neben der Planck-Konst. h die Teilchenmasse m konstant
Die *drei* Variablen sind hier Geschwindigk. v, Wellenlänge λ und Schwingungsdauer T.

Für das Elektron fehlt noch eine Gleichung für die Schwingungsdauer T, die jetzt *nicht* durch $v = \lambda / T$ geliefert wird, denn das hier vorkommende v bezieht *nicht* auf die Bewegung des Teilchens, sondern auf die Phase der Welle. Die richtige Beziehung erhält man wieder aus der Verbindung von Einsteins Formel $W = h/T$ mit dem zutreffenden Energieausdruck, der jetzt $W = ½\, m \cdot v^2$ lautet. In $h/T = ½\, m \cdot v^2$ muss nun noch v eliminiert werden. Das gelingt mit der Formel von De Broglie: $\frac{h}{T} = \frac{m}{2} \cdot v^2 = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{h}{m\lambda} \right)^2$.



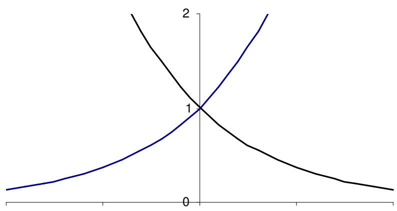
Auswerten, Kürzen und Umstellen liefert $\boxed{\frac{\lambda^2}{T} = \frac{h}{2m}}$. Beim Photon ist $\frac{\lambda^2}{T^2}$ konstant, beim Elektron hingegen $\frac{\lambda^2}{T}$. Das entspricht auch dem Zusammenhang von W und p: Photon: $W \sim p$, Elektron: $W \sim p^2$.
Davisson und Germer konnten dann tatsächlich Selbstauslöschung und Verstärkung, also den Wellencharakter, von Elektronen nachweisen.

f) <u>Die Bestimmungsgleichung der Materiewelle: Die Schrödinger Gleichung</u>
Beim <u>*Licht*</u> haben wir für λ^2 / T^2 *zwei*mal nach x und *zwei*malig nach t abgeleitet.
Bei der <u>*Materie*</u> müssen wir für λ^2 / T auch *zwei*mal nach x aber nur *ein*mal nach t ableiten.
Bzgl. x bleibt also alles beim Alten. Bzgl. t muss etwas Neues gesucht werden.
Die Auslenkung heißt jetzt auch nicht mehr y, sondern Ψ (Psi).

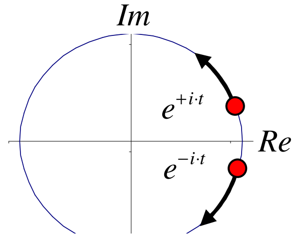
<u>Ansatz</u>: $\Psi(x,t) = f(t) \cdot \sin \frac{2\pi \cdot x}{\lambda}$, mit zunächst *unbekanntem* $f(t)$.

Dann folgt $\Psi' = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot f(t) \cdot \cos \frac{2\pi \cdot x}{\lambda}$; $\Psi'' = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot f(t) \cdot \sin \frac{2\pi \cdot x}{\lambda} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \Psi$

<u>Frage</u>: Welche Funktion f reproduziert sich bereits nach *ein*maligem Ableiten?
Das ist <u>nur</u> die *e*-Funktion.
Doch die *e*-Funktion mit *reellem* Exponenten ist nicht periodisch. Nur wenn der Exponent *imaginär* ist, läuft die *e*-Funktion in der komplexen Zahlenebene im Kreis herum und kehrt nach einem Umlauf in sich selbst zurück.



e^t und e^{-t} sind nicht periodisch



$e^{+i\cdot t}$ bzw. $e^{-i\cdot t}$ laufen um

Daher lautet unsere Wahl:

$f(t) = e^{-i \cdot \frac{2\pi \cdot t}{T}}$. Das Minus $\triangleq$ dem Minus in $y(x,t) = \sin\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda} - \frac{2\pi \cdot t}{T} \right)$. Die Periode erfordert $\frac{2\pi \cdot t}{T}$. Aus $\Psi = e^{-i \cdot \frac{2\pi \cdot t}{T}} \cdot \sin \frac{2\pi \cdot x}{\lambda} \Rightarrow \dot{\Psi} = -\, i \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot e^{-i \cdot \frac{2\pi \cdot t}{T}} \cdot \sin \frac{2\pi \cdot x}{\lambda} = \frac{-i \cdot 2\pi}{T} \cdot \Psi$.

<u>Vergleichen</u>: $\frac{\dot{\Psi}}{\Psi''} = \frac{-i \cdot 2\pi}{T} \cdot \frac{-\lambda^2}{4\pi^2} = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{\lambda^2}{T}$. Einsetzen von $\frac{\lambda^2}{T} = \frac{h}{2m}$

ergibt die **Schrödinger Gleichung** $\boxed{\frac{\dot{\Psi}}{\Psi''} = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{h}{2m}}$. Diese Gleichung beschreibt das real *Mögliche* und nicht das unmittelbar *Vorhandene*.
Das Vorhandene wird mit reellen Zahlen beschrieben. Die Physik zeigt, dass für das „Mögliche“ zwar komplexe Zahlen erforderlich sind, dass die aber auch reichen. Mehr brauchst du nicht.