

Roter Faden Physik

<https://roter-faden-physik.de/>

Quantentheorie I

1. Auflage

Klassische Lichttheorie:
Newton, Huygens, Maxwell.

Übergang zur frühen Quantentheorie:
Quantentheorie der Materie: Plancksches Strahlungsgesetz.
Quantentheorie des Lichtes: Einsteins Lichtquantenhypothese, Comptoneffekt.

Quantentheorie bis 1924
Materiewelle von De Broglie, Schrödingergleichung
Heisenbergsche Unschärferelation
Kopenhagener Deutung des Messprozesses
Superposition von Wellenfunktionen.

von

Dr. Ortwin Fromm

Evangelische Schule Frohnau, Berlin

A) Einleitung.

Die Quantentheorie ist die leitende physikalische Theorie des 20. Jahrhunderts. Sie entwickelte sich aus den Widersprüchen, welche der Elektromagnetismus am Ende des 19. Jahrhunderts zurückließ. Die Quantentheorie erklärt die Wechselwirkung mikroskopischer Objekte. Sie ermöglicht ein Verständnis für die Welt der Elementarteilchen. Sie klärte das Verhalten von Atomen, Molekülen und Festkörpern und löste auf Grund dessen eine technische Revolution aus.

Der Anwendungsbereich der QTh ist jedoch nicht auf das Kleine beschränkt, er ist universell.

Alle vorhergesagten scheinbaren Paradoxien erwiesen sich als zutreffende Sachverhalte.

Bis heute wirft die Quantentheorie tiefgründige erkenntnistheoretische Fragen auf.

Die Quantentheorie ergab sich insbesondere aus den Widersprüchen der *Lichttheorie* des Elektromagnetismus. Deshalb sollen die Anfänge der Lichttheorie noch einmal dargestellt werden.

B) Wiederholung: Klassische Lichttheorie

1) Alte Licht-Theorien. Zwischen 1660 und 1680 entstanden zwei konkurrierende Lichttheorien:

a) Newton entwickelte die *Korpuskeltheorie* des Lichtes. Danach werden *Lichtteilchen* von leuchtenden Körpern „abgeschossen“. So konnte die *Reflexion* als elastischer Stoß erklärt werden. Bei der *Brechung* würden die Lichtteilchen an der Grenzfläche kurzfristig eine größere Anziehungskraft in das optisch dichtere Medium *hinein* erfahren, wodurch ihre Bahn dort zum Lot hin abknickt. Die Lichtteilchen müssten dann im optisch dichteren Medium *schneller* weiterlaufen. Unterschiedliche *Farben* entsprächen unterschiedlichen *Größen* der Lichtteilchen. Die Beugung in den optischen Schattenraum hinein war damals noch nicht beobachtbar und wurde von Newton *nicht* erklärt. *Bewegt* sich der Strahler, so müsste die Lichtgeschwindigkeit nach vorn und hinten bzgl. des Strahlers *gleich*, aber bzgl. des ruhenden Beobachters *unterschiedlich* sein. Messtechnisch überprüfbar war das damals noch nicht und erwies sich später als *falsch*.

b) Huygens interpretierte das Licht als *Welle*, deren Ausbreitung nach dem Huygens'schen Prinzip erfolgt: Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer *gleichfrequenten* Elementarwelle. Die Einhüllende aller Elementarwellen bildet die *neue* Wellenfront. Damit konnte Huygens *Reflexion* und *Beugung* in den Schattenraum erklären. (Orthogonal zur Richtung der Wellenfronten verlaufen die sog. „Wellenstrahlen“). Die *Brechung* führte Huygens, aus heutiger Sicht, auf die *Streuung* zurück, welche an Objekten auftritt, welche „etwas“ *kleiner* als die Wellenlänge sind. Sichtbares Licht wird demnach von Atomen und Molekülen gestreut. Bei der Streuung gelten nun die Atome des transparenten Mediums (z.B. des Glases) als Ausgangspunkte der *gleichfrequenten* Elementarwellen. Doch so wie der Wechselstrom in der *R-L*-Schaltung der Spannung nachhinkt, so hinkt auch die Streuwelle der einlaufenden Welle nach. Dadurch *erscheint* die Wellenlänge verkürzt und die Ausbreitungsgeschwindigkeit $\bar{c} = \bar{\lambda} \cdot f$ wird wegen gleich bleibender Frequenz *f* geringer. Das geringere \bar{c} im Medium erklärt dann die Brechung der Lichtwelle an der Mediengrenze. Desweiteren wird die *Farbaufspaltung* (Dispersion) am Prisma klar: Blaues (höherfrequentes) Licht erleidet eine größere *Phasenrückstellung* als rotes (niederfrequentes) und nimmt so einen anderen Weg. Wichtig zu merken: Die klassische Lichtstreuung betrifft *nur* die Phase. Die *Frequenz*, bzw. Farbe, bleibt bei der klassischen Streuung *gleich*. Dies erwies sich später beim Comptoneffekt als *falsch*.

c) Vorläufige Entscheidung: Ca. um 1820 wurde die „langsamere“ Lichtgeschwindigkeit im Glas nachgewiesen und *Rayleigh* errechnete, dass die Streuintensität mit der 4. Potenz der Frequenz zunimmt, wodurch das Himmelsblau erklärbar wurde. Mittlerweile war es technisch möglich, Doppelspalte bzw. Beugungsgitter mit Stegbreiten im Mikrometerbereich zu fertigen. Mittels der Beugungsmuster am Gitter konnten so Wellenlänge bzw. Frequenz der einzelnen Farben gemessen werden. Ergebnis: Die Wellenlänge des sichtbaren Lichtes liegt zwischen 400 *nm* (violett) und 800 *nm* (rot). Problematisch war, dass für die Lichtwellen ein, das Vakuum erfüllende Ausbreitungsmedium, der „Äther“, benötigt wurde. In diesem würde das Licht mit $c = 300\,000\text{ km/s}$ laufen. *Bewegt* sich die Lampe *gegen* den Äther, so müsste das Licht aus *Lampensicht* nach vorn und hinten mit *unterschiedlichen* Geschwindigkeiten abgehen. Das wurde ca. 1880 von Michelson widerlegt. Erst Einstein löst dieses Problem in der Rel-Th..

2) Neuere Lichttheorie von 1870: Bestätigung des Lichtes als elektromagn. Welle (EM-Welle).

Zwischen 1800 und 1870 wurde die Wechselbeziehung zwischen Elektrizität und Magnetismus aufgeklärt. Die Erkenntnis gipfelte in den *Maxwellschen* Gleichungen, aus denen abgeleitet wurde, dass zeitlich veränderliche elektrische und magnetische Felder sich gegenseitig hervorbringen und dass auf Grund dessen elektromagnetische *Wellen* möglich sind, welche ohne *materielles* Medium das Vakuum durchheilen. Da die Geschwindigkeit der EM-Welle $1/\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$ unabhängig von der Frequenz mit der schon bekannten Lichtgeschwindigkeit c übereinstimmte, war Licht als elektromagnetische Welle identifiziert und der Konkurrenzkampf vorläufig *gegen* Newton und *für* Huygens entschieden. Wir empfangen Licht von weit entfernten Sternen, welche längst untergegangen sein könnten. Dieses Licht hat sich demnach von seinem Erzeuger abgekoppelt und besitzt eine *eigenständige Existenz*. Zu den materiellen Massepunkten gesellten sich somit gegen 1870 *weitere* Existenzen hinzu, nämlich die Lichtwellen, bzw. der schwingende Äther. Das genaue Verständnis der elektromagnetischen Welle löste die „Elektrische Revolution“ aus, welche durch Firmengründungen mit dazu beitrug, dass Berlin eine Millionenstadt wurde.

a) Abstrahlung der EM-Welle des sichtbaren Lichtes von „atomaren Antennen“.

UKW Antennen sind ca. 1,5m lang. Wie groß ist die „Antenne“ des sichtbaren Lichtes?

Der Atomradius beträgt nach dem Ölfleckversuch etwa $5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Nach *Rutherford* umkreisen die Elektronen den Kern in diesem Abstand. Dort halten sich die elektrische Anziehungskraft

$F = e^2 / 4\pi\epsilon_0 r^2$ (beim H-Atom) und Zentrifugalkraft $F_Z = m_e v^2 / r$ die Waage. Gleichsetzen

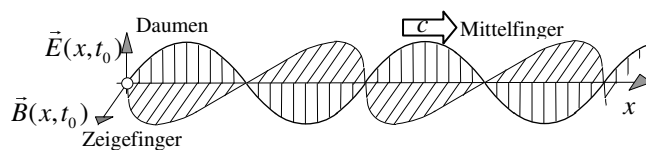
und $v = U / T = 2\pi r \cdot f$ beachten, ergibt die Umlauffrequenz $f = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{e^2}{\pi^3 \epsilon_0 m_e r^3}} \approx 2,3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

Da diese Frequenz der Frequenzen des sichtbaren Lichtes entspricht, war klar, dass die *Atome* „atomare Antennen“ zur Abstrahlung und zum Empfang von Licht im *sichtbaren* Bereich sind.

b) Ausbreitung der elektromagnetischen Welle (Nahfeld / Fernfeld)

Als *Nahbereich* bezeichnet man eine Zone um die Antenne herum, die etwa deren Größenordnung hat. In diesen Bereich können sich die abgestrahlten Teilwellen *nicht* zu geschlossenen Wellenfronten vereinigen, dies geschieht erst im *Fernbereich*. Für die lineare Antenne ist die konstruktive Überlagerung der Teilwellen *senkrecht* zur Antennenrichtung am größten, sodass hauptsächlich in einen zweidimensionalen Ring abgestrahlt wird, dessen Umfang sich mit dem Abstand r zur Antenne vergrößert. Deshalb nimmt die Amplitude der elektromagnetischen Welle im Fernfeld nur mit $1/r$ ab.

In diesem Bereich sind die elektrische und magnetische Feldstärke in *Phase*. Desweiteren stehen sie grundsätzlich senkrecht aufeinander.



Elektrische Feldstärke, magnetische Feldstärke und Ausbreitungsrichtung genügen der *Drei-Finger-Regel* der rechten Hand. Das geht letztlich auf die *Lenz'sche* Regel zurück, nach welcher die Induktion ihrer Ursache *entgegen* wirkt.

c) Die EM-Welle transportiert Energie. Die Energie der *mechanischen* Welle (Seil, Schall) besteht (im Mittel) zu einer Hälfte aus potentieller Energie, weil Arbeit gegen die Rückstellkraft verrichtet wird, und zur anderen Hälfte aus kinetischer Energie, weil Masse bewegt wird. Weil größere Amplitude größere Rückstellkraft und größere Frequenz größere Geschwindigkeit bedeutet, ist die Intensität (= Energiedurchsatz pro Fläche und Zeit) der mechanischen Welle zu dem Quadrat von Amplitude *und* Frequenz proportional: $I_{\text{mech.Welle}} \sim \hat{y}^2 \cdot f^2$.

Die Energie der *elektromagnetischen Welle* besteht auch aus zwei Teilen. Sie steckt zur Hälfte im elektrischen und zur Hälfte im magnetischen Feld. Doch hat der „Äther keine Masse“, bzw. „bewegt das Licht nur Vakuum“. Daher ist die Energie der EM-Welle *nur* vom Quadrat der Amplitude und *nicht* von der Frequenz abhängig: Für die Welle im Fernfeld sind E und B fest verknüpft, es gilt $\hat{B} = \hat{E} / c$. Die elektrische bzw. magnetische Energie im Volumen ΔV

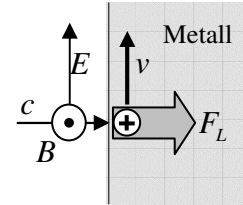
$$\text{betr\"agt } \Delta W_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \hat{E}^2 \cdot \Delta V \text{ bzw. } \Delta W_{magn} = \frac{1}{2} \frac{\hat{B}^2}{\mu_0} \cdot \Delta V = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{\hat{E}^2}{c^2} \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \hat{E}^2 \cdot \epsilon_0 \cdot \Delta V = \Delta W_{el}.$$

$$\Rightarrow \text{Intensit\"at der EM-Welle } I_{EM} = \frac{\Delta W}{A \cdot \Delta t} = \frac{\Delta W}{A \cdot \Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \Delta W_{el}}{\Delta V} \cdot c = \epsilon_0 \hat{E}^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \hat{E}^2,$$

was best\"atigt, dass die Energie der elektromagnetischen Welle frequenzunabh\"angig ist.

d) Die EM-Welle \u00fcbt einen Strahlungsdruck aus.

Auf eine Metalloberfl\"ache falle von links eine elektromagnetische Welle. Wir betrachten einen Zeitpunkt, zu dem die elektrische Feldst\"arke E gerade nach oben und die magnetische Feldst\"arke B dann zwangsl\"aufig nach vorne weist. Unterliegen die beweglichen Ladungstr\"ager dem Ohmschen Gesetz, so ist ihre Geschwindigkeit v proportional zu E .



Auf die nach oben bewegten (gedanklich positiven) Ladungen wirkt so \u00fcber das B -Feld die Lorentzkraft gem\"a\u00df der *Drei-Finger-Regel* der rechten Hand *in* Richtung der einfallenden Strahlung. Damit bewirkt die elektromagnetische Welle auf das Metall einen Strahlungsdruck. - Einsteins Lichtquantenhypothese erkl\"art denselben Druck sp\"ater anders.

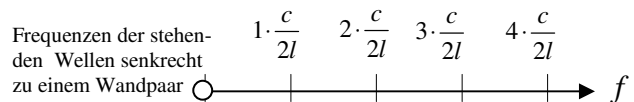
e) Problem: Die Theorie der EM-Wellen im Hohlraumresonator f\u00fchrt zur „UV-Katastrophe“.

Die Deutung des Lichtes als EM-Welle w\"ahrte nur *wenige* Jahrzehnte. Die Welle ist „quantisiert“ und besteht aus Photonen. Diese Einsicht von *Planck* und *Einstein* war die Antwort auf die „UV-Katastrophe“. Die Antwort stie\u00df dann unversehens das Tor zur Quantentheorie auf. Die Katastrophe: In einem Hohlraum gibt es *unendlich* viele stehende EM-Wellen, welche wegen der Frequenzunabh\"angigkeit ihrer Energiewerte s\"amtlichst *gleichberechtigt* sind und somit *alle* mit Energie „gef\u00fcttert“ werden wollen. Wegen der Gleichverteilung bleibt dann f\u00fcr die Schwingungen der endlich vielen Atome der Welt nichts \u00fcbrig. Jeder K\u00f6rper k\u00fchlt auf 0 K ab.

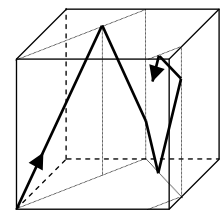
Zur Untersuchung eindimensionaler *Schallwelle* verwendet man das Kundtsche Rohr. Auf Membranen kann man die m\u00f6glichen stehenden Wellen als Chladnische Figuren beobachten. F\u00fcr die EM-Wellen betrachten wir einem dreidimensionalen kubischen Hohlraum der Innenkantenl\"ange l aus Metall und suchen die Anzahl der darin m\u00f6glichen stehenden EM-Wellen. Wegen des leitenden Materials bilden sich an den W\"anden *Knoten* aus. Eine Welle senkrecht zu einem Wandpaar kann dann stehend sein, wenn n Halbwellen auf die Kantenl\"ange l passen.

Aus $n \cdot \lambda / 2 = l$ folgen so die zul\"assigen

$$\text{Eigenfrequenzen } f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \cdot \frac{c}{2l}.$$



Nun betrachten wir *schr\"ag* laufende Wellen. Eine Billardkugel kann (schwerelos) entsprechend der nebenstehenden Abb. in einem W\u00fcrfel mit reflektierenden W\"anden hin- und herfliegen. Der entsprechende „Schr\"aglauf“ einer elektromagnetischen Welle ist aber eine *Superposition* aus Wellen rechtwinklig zu den W\"anden. Da die stehende EM-Welle jedoch auf den W\"anden Knoten hat, gelten die Knoten f\u00fcr alle Komponenten *einzel*n. Daher m\u00fcssen in x -, y - bzw. z -Richtung



n_x, n_y , bzw. n_z Halbwellen zwischen die W\"ande passen. Das n in der Formel $f_n = n \cdot \frac{c}{2l}$ ist

daher durch den Betrag $\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$ des Vektors \vec{n} zu ersetzen: $f = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \cdot \frac{c}{2l}$.

Man sieht sofort, dass *mehrere* $(n_x | n_y | n_z)$ -Kombinationen *dieselbe* Frequenz f liefern k\u00f6nnen. Z.B.

$$\text{gilt } 9 = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} \text{ oder } 15 = \sqrt{5^2 + 10^2 + 10^2} = \sqrt{2^2 + 10^2 + 11^2} = \sqrt{2^2 + 5^2 + 14^2} \text{ usw.}$$

Um herauszubekommen, wie viele ungef\"ahre Realisationsm\u00f6glichkeiten es f\u00fcr das Frequenzintervall von f bis $f + \Delta f$ gibt, ordnet man alle Eigenfrequenzen im 1. Oktanten eines drei-

dimensionalen „Frequenzabzählraum“ an, denn n_x , n_y und n_z sind positive Zahlen. Die Skalierung hat die Weite $c / 2l$.

Daher hat ein Elementarwürfel das Volumen $V_0 = (c / 2l)^3$.

Die interessierende Kugelschale zwischen f und $f + \Delta f$

hat das Volumen $V = \frac{A_0}{8} \cdot \Delta f = \frac{4\pi f^2}{8} \cdot \Delta f = \frac{\pi f^2}{2} \cdot \Delta f$.

Damit gibt es $\frac{V}{V_0} = \frac{4\pi f^2}{c^3} \cdot l^3 \cdot \Delta f$ Kombinationen

$(n_x | n_y | n_z)$, welche eine Frequenz zwischen f und

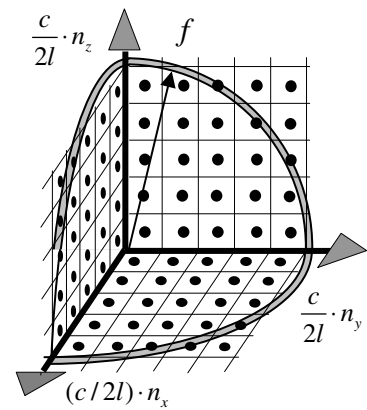
$f + \Delta f$ liefern. Da EM-Wellen in zwei transversalen Richtungen schwingen können, verdop-

pelt sich das Ergebnis: Pro l^3 und Δf gibt es also $\bar{g}(f) = \frac{8\pi f^2}{c^3}$ verschiedene stehende EM-

Wellen *derselben* Frequenz f . Die \bar{g} -Zahl nennt man *Entartungsfaktor*, er nimmt *quadratisch*

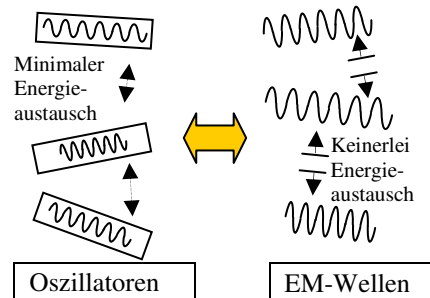
mit f zu. Allein bis zur Farbe „blau“ mit $\lambda_{bl} = 400 \text{ nm}$ und $f_{bl} = c / \lambda_{bl} = 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ gibt es

$n = \int_0^{f_{bl}} \bar{g}(f) df = 1,3 \cdot 10^{20}$ stehende Wellen pro m^3 . UV-Katastrophe: $\lim_{f \rightarrow \infty} n(f) = \infty$.



f) EM-Wellen existieren nicht von alleine. Sie werden von Materie erzeugt und vergehen an ihr.

Während die mechanischen Eigenschwingungen des Festkörpers durch Störungen minimal *gekoppelt* sind und sich die thermische Energie so auf *alle* Schwingungsmoden verteilt, gilt das *Superpositionsgesetz* beim Elektromagnetismus in *voller Strenge*. Die EM-Wellen können *keinerlei* Energie *untereinander* austauschen. Sie erhalten ihre Energie (in unserem Falle) *ausschließlich* von den schwingenden elektrischen Ladungen der atomaren Oszillatoren.



Wir betrachten den Energieaustausch in zwei Schritten: *Zunächst* werden die N Atome des Hohlkörpers auf die Temperatur T gebracht, wodurch die zugehörigen N Eigenschwingungen im Mittel jeweils die Energie $k \cdot T$ mit $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J / K}$ (Boltzmannkonstante) erhalten.

Nun werde der Körper perfekt isoliert und die schwingenden Ladungen der Atome beginnen EM-Wellen auszusenden. Die abgestrahlten Wellen werden an anderer Stelle aber wieder absorbiert und neu ausgestrahlt. Im thermischen Gleichgewicht halten sich Emission und Absorption die Waage. Wie bei der Temperaturmischung verteilt sich die verfügbare Energie letztlich auf die N schwingenden Wandatome *und* die N_{EM} möglichen elektromagnetische Wellen, denn beide Sorten sind *gleichberechtigte* Energieträger. Die „Mischtemperatur“ T_M ergibt sich aus dem Energieerhaltungssatz $N \cdot T = (N + N_{EM}) \cdot T_M$ zu $T_M = T \cdot N / (N + N_{EM})$. Da es aber unendlich viele gleichberechtigte EM-Wellen gibt, strebt die Anzahl N_{EM} der EM-Wellen gemäß \bar{g} quadratisch gegen unendlich, womit T_M auf null Kelvin sinkt. Wie „Vampire“ saugen die EM-Wellen der materiellen Welt sämtliche Energie ab. Da das aber nicht der Fall ist, ist entweder ist die *EM-Lichttheorie* oder die *Schwingungstheorie der Materie* oder *beides* falsch.

C) Übergang zur Quantentheorie (Die frühe Quantentheorie 1900-1924)

I) Quantentheorie der **Materie** : Das Plancksche Strahlungsgesetz (1900).

Planck fand heraus, dass die UV- Katastrophe deshalb ausbleibt, weil die Oszillatoren nicht mit-spielen. Sie versorgen die divergent vielen EM-Wellen nur unzureichend mit Energie und behalten genug als Wärme für sich. Diese Blockade gelingt ihnen aber nur, weil ihr Schwingungsverhalten ganz eigenwillig, nämlich quantenhaft ist. So stieß Planck die Tür zur Quantentheorie auf.

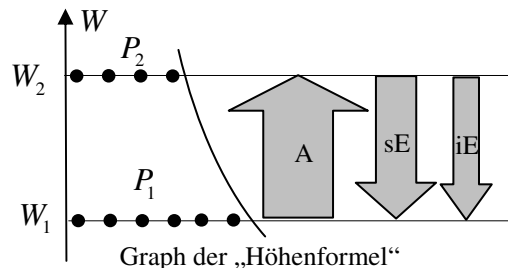
Planck suchte die Anzahl $g < \bar{g}$ der *tatsächlich* aktivierten EM-Wellen und forderte:

- (i) Der Energieaustausch zwischen Oszillator und Lichtwelle erfolgt *nur* in *Resonanz*, also *nur* für *übereinstimmende* Frequenzen.
- (ii) Ein Oszillator der *baubedingten* Frequenz f kann aus dem Pool der *tatsächlich* aktiven $g < \bar{g}$ EM-Wellen der *Lichtfrequenz* f den Energiewert ΔW absorbieren und anschließend eine Schwingung (bei gleichbleibender Frequenz f) mit *größerer* Amplitude ausführen.
- (iii) Ein Oszillator der *baubedingten* Frequenz f kann durch spontane Emission eine EM-Welle der Lichtfrequenz f emittieren, wobei sich seine Amplitude *mindert*. Als „Ziel“ der Abstrahlung stehen *alle* \bar{g} prinzipiell *möglichen* EM-Wellen der Lichtfrequenz f zur Verfügung.
- (iv) Die *tatsächlich* aktiven $g < \bar{g}$ EM-Wellen der Lichtfrequenz f können den Oszillator mit der *baubedingten* Frequenz f zur Emission einer EM-Welle der Lichtfrequenz f veranlassen (induzierte Emission) und damit eine *Amplitudenminderung* des Oszillators bewirken.
- (v) Die Schwingungsmoden der Oszillatoren haben minimalen Energieaustausch. Das führt zu einer *Wahrscheinlichkeitsverteilung*, wie man sie von der barometrischen *Höhenformel* $P(h) = P_0 \cdot e^{-g \cdot m \cdot h / kT}$ kennt. Dort steigen die Gasteilchen durch Stöße auf und sinken durch die Schwere ab. Ersetzt man nun $W_{pot} = mhg$ durch $W_{osz} = W$, so erhält man die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* $P(W) = P_0 \cdot e^{-W/kT}$ dafür, dass ein Oszillator mit der Energie W schwingt.

(Bem.: Die Form *dieser* Herleitung des Planckschen Strahlungsgesetzes geht auf Einstein zurück) Betrachte jetzt einen Oszillator der Frequenz f , welcher mit der Energie W_1 schwingt. Wähle einen beliebigen, aber festen Energiewert $W_2 > W_1$ und stelle alle Prozesse zusammen, welche von $W_1 \rightarrow W_2$ und von $W_2 \rightarrow W_1$ führen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind dann:

Austausch	Übergangswahrscheinlichkeit
Absorption	$a \cdot g \cdot P_1$
Spontane Emission	$a \cdot \bar{g} \cdot P_2$
Induzierte Emission	$a \cdot g \cdot P_2$

$a =$ Proportionalitätsfaktor



Im Gleichgewicht halten sich Absorption und Emission die Waage. Nach Kürzen des Proportionalitätsfaktors a gilt somit $g \cdot P_1 = \bar{g} \cdot P_2 + g \cdot P_2$. Division durch P_1 und Umstellen nach g liefert mit der „Höhenformel“ $P = P_0 \cdot e^{-W/kT}$ den Ausdruck $g = \frac{\bar{g}}{P_1/P_2 - 1} = \frac{\bar{g}}{e^{-(W_1-W_2)/kT} - 1} = \frac{\bar{g}}{e^{\Delta W/kT} - 1}$.

Gemäß der „UV-Katastrophe“ beträgt die *Energiedichte* der EM-Wellen $\bar{\rho} = \bar{g} \cdot kT$, denn hier erhalten alle \bar{g} Wellen den gleichen Energiewert kT . ($k =$ Boltzmannkonstante).

Die *tatsächliche* Energiedichte lautet $\rho = g \cdot \Delta W$, weil erstens nur g EM-Wellen aktiv sind und zweitens die betrachteten EM-Wellen ihre Energien genau aus der Differenz ΔW der Schwingungsenergien des Oszillators beziehen. Damit folgt $\rho = g \cdot \Delta W = \frac{\bar{g} \cdot \Delta W}{e^{\Delta W/kT} - 1} = \frac{8\pi f^2}{c^3} \cdot \frac{\Delta W}{e^{\Delta W/kT} - 1}$.

Die Energiedichte ρ der EM-Wellen ist also eine Funktion von f und ΔW .

Der zweite Faktor der ρ -Formel strebt für $\Delta W \rightarrow \infty$ gegen *null*. Der erste Faktor divergiert jedoch nach wie vor mit f^2 . Plancks Geniestreich war es nun, die erlaubten Energie- bzw. Amplitudensprünge $\Delta W \sim \Delta \hat{E}^2$ des Oszillators mit seiner baubedingten Eigenfrequenz f zu verknüpfen. Seine willkürliche Forderung lautete $\Delta W \sim f$. Den Proportionalitätsfaktor nannte er $h =$ Hilfsgröße, sodass $\Delta W = h \cdot f$ entstand. Später erhielt die Größe h den Namen „Plancksches Wirkungsquantum“ und es stellte sich heraus, dass $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ eine universelle Natur-

konstante ist. Damit nahm das Strahlungsgesetz die Form

$$\rho(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \cdot \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \quad \text{bzw.} \quad \rho(f, T) = \frac{8\pi h f^3}{c^3 \cdot (e^{hf/kT} - 1)}$$

an. (Wegen des Resonanzprinzips stimmen $f_{Osz} = f_{Licht} = f$ überein)

Da das e^f im Nenner stärker divergiert, als f^3 im Zähler, geht ρ für $f \rightarrow \infty$ tatsächlich gegen null und die UV-Katastrophe bleibt aus.

Das Strahlungsgesetz liefert ein temperaturabhängiges Maximum.

Z.B. hat sich die Sehempfindlichkeit des Auges an das Strahlungsmaximum der Sonne mit ihrer Oberflächentemperatur von $T \approx 6000K$ angepasst.

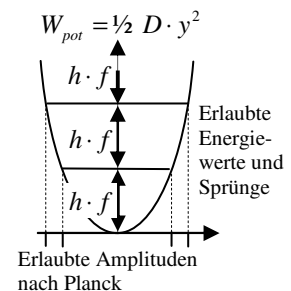
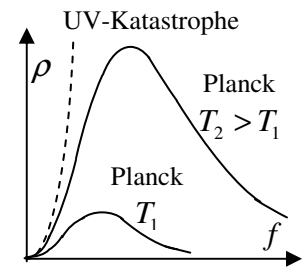
Die „UV-Katastrophe“ blieb nur deshalb aus, weil die Anzahl der möglichen Oszillatoramplituden durch den Ansatz $\Delta W = h \cdot f$ von $n \in \mathbb{R}^+$ auf $n \in \mathbb{N}$ reduziert wurde. Setzen wir nämlich die kleinstmögliche Schwingungsamplitude (Ruhe) mit $\hat{y}_0 = 0$ an (in Wirklichkeit folgt sie aus der

„Ruheenergie“ $\frac{1}{2} D \hat{y}_0^2 = \frac{1}{2} h \cdot f_{Osz}$), so ergeben sich die weiteren erlaubten Amplituden aus

$\frac{1}{2} D \hat{y}_1^2 = 1 \cdot h \cdot f_{Osz}$, $\frac{1}{2} D \hat{y}_2^2 = 2 \cdot h \cdot f_{Osz}$, Alle Zwischenamplituden sind verboten!

So etwas ist in der klassischen Mechanik *unvorstellbar*. Ich kann einem Oszillator *jede* beliebige

Anfangsauslenkung bzw. Amplitude geben. Planck zeigte: Nur wenn die Bewegungsmöglichkeiten des mechanischen Systems durch *Quantenbedingungen* extrem eingeschränkt sind, werden die hochfrequenten EM-Wellen nicht „gefüttert“, so dass sich das *tatsächliche* Strahlungsgesetz ergibt. Dieser Sachverhalt zeigt sich später auch bei den Elektronen im Atom. Sie können *nicht*, wie Planeten um die Sonne, beliebige Bahnen einnehmen. Nur eine abzählbare Anzahl diskreter Bahnradien ist erlaubt. Nach dem tieferen Grund dieser *Quantisierung* wird bis heute gesucht.



II) Quantentheorie *des Lichtes* : Einsteins Lichtquantenhypothese (1905).

Der Lichtelektrische Effekt, Interpretation des Photoeffektes durch Einstein.

Der Lichtelektrische Effekt = Photoeffekt wurde bereits 1839 entdeckt und das ganze restliche „elektrische Jahrhundert“ hindurch untersucht. Erst 1905 gelang es *Einstein*, ihn zu deuten.

Strahlt man Licht der Frequenz f und Amplitude \hat{E} auf eine Metallplatte, so überträgt dieses seine *Energie* auf die Elektronen des Metalls, wodurch eine gewisse Anzahl $n_e \geq 0$ von Elektronen mit einer gewissen Geschwindigkeit $v_e \geq 0$ ausgelöst werden *können*. Die freien Elektronen der Ladungswolke vor der Platte gelangen teilweise zu einem Draht ring von welchem sie aufgefangen werden. Die Metallplatte fungiert somit, wie die Heizwendel bei der Glühemission, als *Kathode*, während dem Draht ring die Rolle der *Anode* zukommt.

Eingangsgrößen sind also Frequenz f (Farbe) und Amplitudenquadrat \hat{E}^2 (Helligk.) des Lichtes.

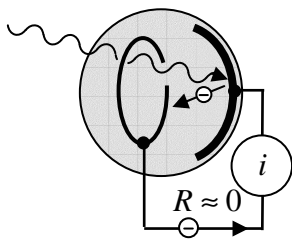
Ausgangsgrößen sind die Anzahl n_e und das Geschwindigkeitsquadrat v_e^2 der Elektronen.

Daher ergeben sich die vier Messreihen: $n_e(f)$, $n_e(\hat{E}^2)$ und $v_e^2(f)$, $v_e^2(\hat{E}^2)$, wobei die jeweils verbleibende Lichtvariable konstant gehalten wird.

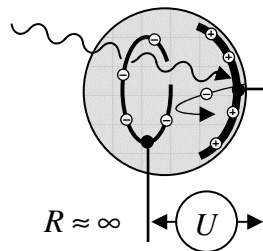
Wir betrachten zwei Schaltungen.

- In der Kurzschlusschaltung werden Draht ring und Metallplatte durch einen Leiter *verbunden*, sodass die aufgefangenen Elektronen zur Kathode zurückfließen können und der Raum zwischen Kathode und Anode *feldfrei* bleibt. *Alle* emittierten Elektronen gelangen so zur Anode. Ein Amperemeter mit dem inneren Widerstandes $R \approx 0$ misst dann in dem geschlossenen Stromkreis den Strom = „Photostrom“ $i = \Delta Q / \Delta t = n_e \cdot e / \Delta t$, welcher zur gesuchten Anzahl n_e der Elektronen proportional ist. Die Geschwindigkeit v_e spielt dabei keine Rolle.

b) In der offenen Schaltung bleiben Kathode und Anode *unverbunden*. Die *anfängs* emittierten Elektronen gelangen noch durch einen nahezu feldfreien Raum zur Anode, wo sie sich festsetzen und diese mit $-\Delta Q$ aufladen. Kathode und Anode gemeinsam stellen jedoch die „Platten“ eines Kondensators mit der baubedingten Kapazität C dar. Wird der Kondensator mit ΔQ aufgeladen, so baut sich zwischen seinen Platten ein elektrisches Feld auf, welchem die Spannung $\Delta U = \Delta Q / C$ entspricht. Die Aufladung endet mit dem Ladungswert Q und dem Spannungswert U , wenn die kinetische Energie W_{kin} der emittierten Elektronen *gerade* nicht mehr ausreicht, die potentiellen Energie $U \cdot e$ zur Überwindung des Feldes aufzubringen. Dann gilt $W_{kin} = W_{pot}$ bzw. $\frac{1}{2} m_e v_e^2 = U \cdot e$. Nach wenigen Nanosekunden Aufladungszeit ist somit das Geschwindigkeitsquadrat v_e^2 zur Spannung U proportional: $v_e^2 = 2 \cdot U \cdot e / m_e$. Die Spannung wird mit einem Voltmeter des inneren Widerstandes $R \approx \infty$ gemessen. Die Anzahl n_e der weiterhin emittierten, aber nicht mehr zur Anode gelangenden Elektronen spielt dann keine Rolle mehr.



Die Kurzschlussschaltung misst die Anzahl der vom Licht emittierten Elektronen.



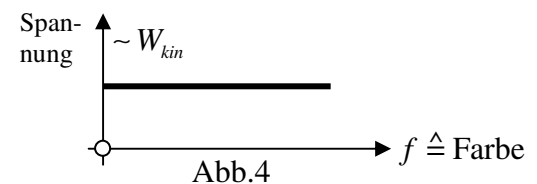
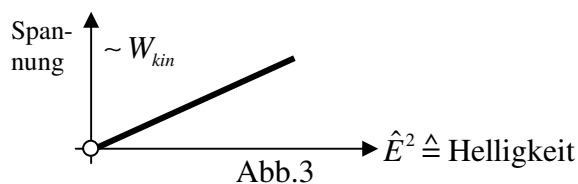
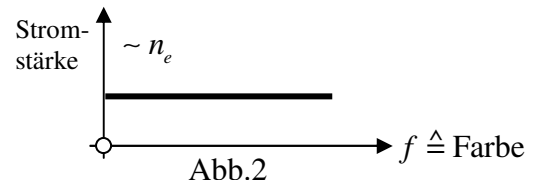
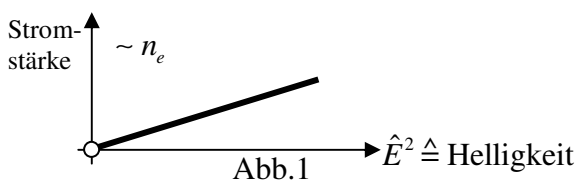
Die offene Schaltung misst die Geschwindigkeit der vom Licht emittierten Elektronen.

Was ist zu erwarten, wenn Licht als *elektromagnetische Welle* interpretiert wird?

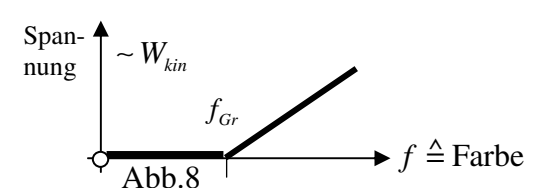
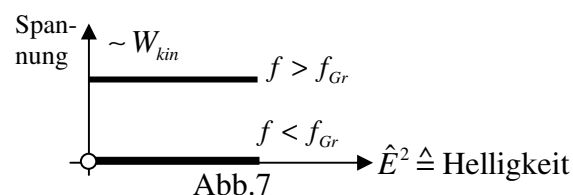
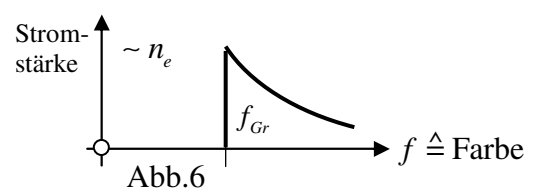
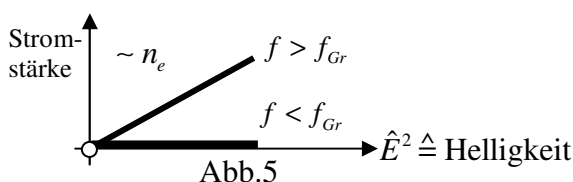
Hier steckt die Energie *ausschließlich* in der Amplitude \hat{E}^2 . Die Frequenz f spielt *keine* Rolle.

Die Erwartungen lauten daher:

Für kleines \hat{E}^2 dauert es *lange*, ehe ein Elektron die Auslöseenergie aufgenommen hat. Sowohl der Strom, als auch U sollten daher (unabhängig von f) mit der Helligkeit ansteigen.



Tatsächlich sieht die Sache *völlig anders* aus:



Erst ab einer Grenzfrequenz setzt Photoemission ein

Einsteins Interpretation des Photoeffektes basiert auf zwei neuen Aussagen.

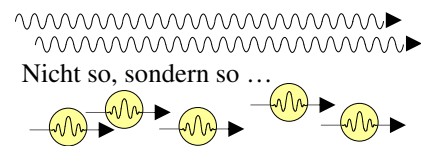
1) Aussage 1. betrifft das Wesen des Lichtes.

Einstein wusste von Planck, dass ein mechanischer Oszillator *nur* solche Schwingungsweiten ausführen kann, für welche die zugehörigen Schwingungsenergien W_n proportional zu Vielfachen der baubedingten Eigenfrequenz sind: $W_n \sim n \cdot f_{Osz}$. Als Proportionalitätskonstante hatte Planck das Wirkungsquantum h entdeckt, also gilt $W_n = n \cdot h \cdot f_{Osz}$. Somit sind die Schwingungsportionen (Schwingungsquanten) eines Oszillators mit großer Eigenfrequenz (z.B. mit großer Federkonstante) größer als die eines Oszillators mit kleinerer Eigenfrequenz.

Einstein realisierte, dass das elektromagnetische Feld *auch* ein schwingungs- bzw. wellenfähiges Gebilde ist und forderte daher Entsprechendes: Das EM-Feld, bzw. die Lichtwelle, kann nur *solche* Schwingungen (bzw. Wellen) ausführen, deren zugehörige Schwingungsenergien $W_n = n \cdot h \cdot f_{Licht}$ betragen. Die geringst mögliche Energie einer Lichtwelle beträgt daher $W_1 = 1 \cdot h \cdot f_{Licht}$. In diesem Fall „besteht“ die Lichtwelle lediglich aus *einem Photon* (Lichtteilchen) mit der Energie $W_{ph} = h \cdot f_{ph}$.

Hochfrequentes Licht besteht aus energiereicheren Photonen, als z.B. eine niederfrequente Rundfunkwelle: Anzahl \times Energie = Intensität.

Compton stellte später fest, dass einzelne Photonen sogar echte *Teilchen* mit Masse und Impuls sind, welche Stöße ausführen und die Fotoplatte Punkt für Punkt schwärzen.



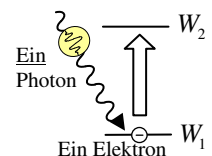
Wellen schwingen, Teilchen nicht. Dennoch trägt jedes einzelne Photon die *kollektive* Eigenschaft aller Photonen, nämlich die Frequenz (Farbe) der Welle wegen $W = h \cdot f_{Licht}$ in sich. Daher zeigen viele Photonen *gemeinsam* das Interferenzmuster (Auslöschung u. Verstärkung) der Welle.

Wellenbild	Helligkeit, Intensität, Amplitude ²	Farbe, Frequenz
Teilchenbild	Anzahl der Photonen mit jeweils $W_n = n \cdot h \cdot f_{Licht}$	Eigenschaft des einzelnen Photons $W = h \cdot f_{Licht}$

2) Aussage 2. betrifft die Wechselwirkung des Lichtes mit der Materie.

Beim *Photoeffekt* gilt das Eins zu Eins-Prinzip:

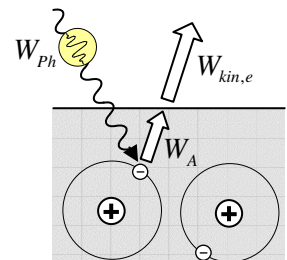
- a) Ein Photon kann seine Energie *nur* auf ein *einzelnes* Elektron übertragen. Dabei wird vollständig absorbiert. Das Photon kann sich *nicht teilen*.
- b) Ein Elektron kann jeweils nur *ein einzelnes* Photon absorbieren. Ein Elektron kann *nicht* zwei Photonen *gleichzeitig absorbieren*.



Mit Hilfe dieser beiden Postulate konnte Einstein den Photoeffekt erklären:

Licht der Frequenz f besteht aus Photonen der Energie $W_{ph} = h \cdot f$.

Fällt ein Photon auf ein Elektron, so überträgt es seine Energie vollständig auf dieses und hört damit auf zu existieren. Je nach dem Wert von W_{ph} springt das Elektron auf eine höhere Schale oder es verlässt das Metall und tritt an die Oberfläche. Ist W_{ph} sogar größer als die Ablösearbeit W_A , so steht die restliche Energie als kinetische Energie zur Verfügung.



Daraus folgt die Bilanzgleichung $W_{ph} = W_A + W_{kin,e}$. Einsetzen ergibt $W_{kin,e} = h \cdot f - W_A$.

Messung des Photoeffektes an der offenen Schaltung für Cäsium.

	Farbe	tiefrot	rot	gelb	grün	blaugrün	blau	violett
gemessen	$f / 10^{14} \text{ Hz}$	4,62	4,84	5,17	5,45	6,12	6,82	7,50
gemessen	Spannung U	0	0,06	0,2	0,35	0,59	0,91	1,13
errechnet	$W_{kin,e} = U \cdot e$ in 10^{-19} J	0	0,10	0,32	0,56	0,94	1,46	1,81

In der letzten Zeile wurde die Messbeziehung $W_{kin,e} = U \cdot e$ der *offenen* Schaltung ausgenutzt.

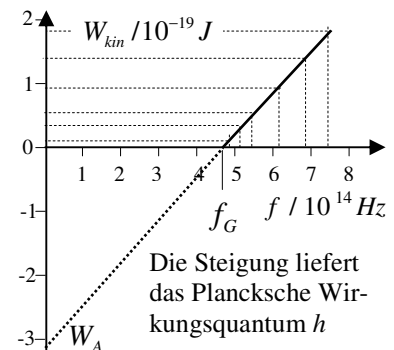
Auswertung

Entsprechend Abb.8 ergibt der Graph von $W_{kin,e}(f)$ eine Gerade der Form $W_{kin,e}(f) = m \cdot f + n$.

Vergleich mit $W_{kin,e} = h \cdot f - W_A$ zeigt, dass bei Richtigkeit von Einsteins Ansatz die Steigung m der Messgerade mit dem Planckschen Wirkungsquantum h übereinstimmen muss: $m = h$.

$$\text{Da } m = \frac{\Delta W_{kin,e}}{\Delta f} = \frac{(1,81 - 0,10) \cdot 10^{-19} \text{ J}}{(7,50 - 4,84) \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 6,43 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \approx h$$

beträgt, ist Einsteins Ansatz soweit bestätigt. Für den „y-Achsenabschnitt“ erhält man durch zeichnerische Extrapolation der Messgeraden $n \approx -3,1 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Damit beträgt die Bindungsenergie des Cäsium, welche als *Ablösearbeit* W_A aufzubringen ist, $W_{Cäsium} \approx 3,1 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Nullsetzen von Einsteins Gleichung $W_{kin,e} = h \cdot f - W_A$ ergibt die Grenzfrequenz f_G , ab welcher Elektronen austreten können. Es gilt $f_G = W_A / h$.



Nun werden auch die Funktionsverläufe der Abb. 5), 6) und 7) auf Seite 8 verständlich:

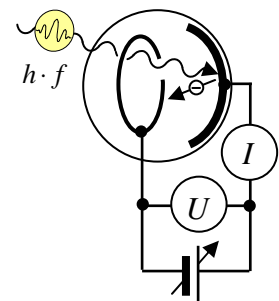
Abb. 5) Gemäß B2c) und Einsteins Ansatz gilt $\hat{E}^2 = \frac{\sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}}{A \cdot \Delta t} \cdot \Delta W = \frac{\sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}}{A \cdot \Delta t} \cdot n_{ph} \cdot h f$.

$$\text{Daraus folgt } I = \frac{n_e \cdot e}{\Delta t} = \frac{n_{ph} \cdot e}{\Delta t} = \frac{A \cdot e}{h f \cdot \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}} \cdot \hat{E}^2 \Rightarrow I \sim \hat{E}^2 \text{ (für } f > f_G \text{)}.$$

Abb. 6) Die selbe Gleichung $I = \frac{A \cdot e \cdot \hat{E}^2}{h \cdot \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}} \cdot \frac{1}{f} \Rightarrow I \sim 1/f$ besagt, dass sich die fest eingestrahle Energie für höheres f auf *weniger* Photonen konzentriert. \Rightarrow *weniger* Elektronen.

Abb. 7) Aus $U = W_{kin,e} / e = (h f - W_A) / e$ erkennt man, dass U von \hat{E}^2 *unabhängig* ist.

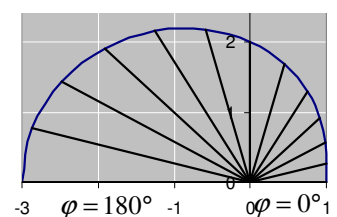
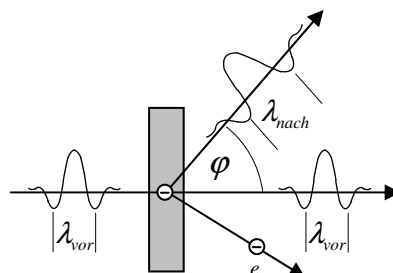
Versuchsdurchführung zur Messung des Photoeffektes mit der Gegenfeldmethode: In der Praxis wird eine Kombination von Kurzschluss- und offener Schaltung verwendet: Über eine regelbare Spannungsquelle wird ein Gegenfeld mit einer Spannung U so eingestellt, dass der Strom I gerade auf null abfällt. Für diese Einstellung gilt wie oben $e \cdot U = W_{kin,e}$, so dass alle weiteren Überlegungen mit denen oben übereinstimmen.



III) Der Comptoneffekt (1922).

Compton bestrahlte eine *dünne* Graphitschicht mit Röntgenlicht. Dabei wurden, wie beim Photoeffekt, Elektronen emittiert. Es trat aber *auch* Licht aus, was beim Photoeffekt *nicht* der Fall ist. Ein Großteil des austretenden Lichtes durchdrang die Schicht gradlinig. Compton sah aber auch Licht zwischen 0° bis $\pm 180^\circ$, welches *Streulicht* sein musste. Streuung erfolgt an Objekten, die *kleiner* als die Wellenlänge des einfallenden Lichtes sind. Für Röntgenlicht kommen als Streuer somit keine Atome als Ganzes, sondern nur noch die *Elektronen* als Einzelobjekte in Betracht.

Wir kennen die Streuung von sichtbarem Licht an Atomen: Die EM-Welle veranlasst die gebundenen Elektronen dort zu erzwungenem Mitschwingen, sodass die Streuwelle zwar phasenverzögert ist, doch bzgl. der Frequenz *gleich* bleibt.



Wellenlängenvergrößerung als Funktion des Streuwinkels

Eine *Frequenzänderung* ist bei der Streuung einer klassischen EM-Welle *nicht* vorstellbar.

Genau dies geschieht aber beim Comptoneffekt:

Je größer der Streuwinkel, desto größer die Frequenzminderung. In Rückrichtung ($\pm 180^\circ$) hat das Streulicht, bei geeigneten Versuchsbedingungen, nur noch ein *Drittel* seiner Eingangsfrequenz.

Nach Einsteins besteht auch Röntgenlicht aus Photonen der jeweiligen Energie $W_{ph} = h \cdot f$.

Wie können die Photonen Energie verlieren, und zwar in Rückrichtung am meisten?

Einstein deutete Photonen als *Energiepakete*. Compton ging darüber hinaus und schrieb ihnen

mittels der Einsteinformel $h \cdot f_{ph} = W_{ph} = m_{ph} \cdot c^2$ auch eine *Masse* zu, denn als massetragende

Teilchen haben sie mit der Geschwindigkeit c auch einen *Impuls*: $p_{ph} = m_{ph} \cdot c$. Damit werden

die Photonen zu *stoßenden Teilchen*. Als Stoßpartner können sie nämlich Energie verlieren:

Stößt eine bewegte Kugel eine gleichschwere ruhende Kugel, so bleibt die bewegte Kugel liegen

und die zuvor ruhende fliegt weiter. Für gleichschwere Kugeln ist der Energieaustausch *maximal*.

Compton *optimierte* den Versuch. Er forderte „Massengleichheit“ zwischen Photon und Elektron.

Aus $m_{ph} = h \cdot f_{ph} / c^2 \stackrel{!}{=} m_e$ ergibt sich dann die „*Comptonfrequenz*“ $f_C = m_e \cdot c^2 / h = 1,24 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$.

Das entspricht der *Comptonwellenlänge* $\lambda_C = c / f_C = h / c \cdot m_e = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$.

Die *Comptonphotonen* erzeugt man in der Röntgenröhre durch eine Mindestbeschleunigungsspannung U_C , welche sich aus $U_C \cdot e = h \cdot f_C = m_e \cdot c^2$ zu $U_C = h \cdot f_C / e = 512000 \text{ V}$ (eine ½ Million! Volt) ergibt. Im Vergleich zur Energie der Comptonphotonen, welche ausschließlich in deren Bewegung steckt (Ruheenergie von Photonen gleich null), ist die *kinetische* Energie der gestoßenen Elektronen im Atom vernachlässigbar, sodass diese als *ruhend* anzusehen sind. Demzufolge müsste ein Photon mit f_C beim zentralen Stoß mit einem Elektron „liegen bleiben“ und das zuvor „ruhende“ Elektron mit der ungeheuer großen kinetischen Energie, welche seiner eigenen Ruhemasse entspricht von dannen fliegen. Weil ein Photon erstens nicht „liegen bleiben“ kann und zweitens, das Elektron nach dem Stoß fast Lichtgeschwindigkeit erreicht, ist die klassische Mechanik jedoch nicht mehr anwendbar, die Relativitätstheorie wird erforderlich.

Die kinetische Energie einer Masse m beträgt klassisch $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2v^2}{m} = \frac{p^2}{2m}$. Gemäß Relativitätstheorie kommt noch die Ruheenergie $m \cdot c^2$ hinzu. Der Ausdruck $W = mc^2 + p^2/2m$ ist aber

nur eine Näherung des Vollausdruckes $W = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$ für kleine Geschwindigkeiten. Das soll rückwärts herum gezeigt werden: Ausgangspunkt ist die für $x \ll 1$ gültige Näherung $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$. Aus $W = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} = mc^2 \sqrt{1+(pc)^2/(mc^2)^2} =$

$= mc^2 \sqrt{1+p^2/m^2c^2}$ wird dann mit $p \ll mc$: $\approx mc^2 (1+p^2/2m^2c^2) = mc^2 + p^2/2m$. Qed.

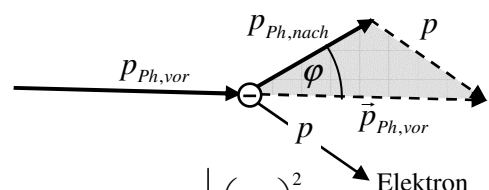
Die relativistische Gesamtenergie des Elektron beträgt „also“ $\sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$.

Da Photonenmasse $m_{ph} = m_e = m$ und Elektronenmasse gleich sein *sollen*, folgt: $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$

Energieerhaltungssatz beim elastischen Stoß		
Energie:	vor dem Stoß	nach dem Stoß
Elektron	$W_e = mc^2$	$\sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$
Photon	$W_{ph} = hf = mc^2$	$\bar{W}_{ph} = h \cdot \bar{f}$

Den *Impulserhaltungssatz* entnimmt man nebenstehenden Abb. per Kosinussatz:

$$p^2 = p_{Ph,vor}^2 + p_{Ph,nach}^2 - 2p_{Ph,vor}p_{Ph,nach} \cos \varphi$$



Energieerhaltungssatz: (I) $mc^2 + mc^2 = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} + h \cdot \bar{f} \quad | \quad -h \cdot \bar{f} \quad \left| \quad \left(\dots \right)^2$

Impulserhaltungssatz: (II) $p^2 = c^2m^2 + \frac{h^2\bar{f}^2}{c^2} - 2mc \cdot \frac{h\bar{f}}{c} \cdot \cos \varphi \quad | \quad \cdot c^2$

Gesucht ist die Frequenz \bar{f} des Photons *nach* dem Stoß.

Der Impuls p des Elektrons *nach* dem Stoß wird eliminiert.

Umformen von (I) : $4m^2 c^4 - 4m c^2 h \bar{f} + h^2 \cdot \bar{f}^2 = (m c^2)^2 + (p c)^2$

$$3m^2 c^4 - 4m c^2 h \bar{f} + h^2 \cdot \bar{f}^2 = p^2 c^2$$

Umformen von (II): $p^2 c^2 = c^4 m^2 + h^2 \bar{f}^2 - 2m c^2 \cdot h \bar{f} \cdot \cos \varphi$

Gleichsetzen : $3m^2 c^4 - 4m c^2 h \bar{f} + h^2 \cdot \bar{f}^2 = c^4 m^2 + h^2 \bar{f}^2 - 2m c^2 \cdot h \bar{f} \cdot \cos \varphi$

Vereinfachen: $m^2 c^4 - 2m c^2 h \bar{f} = -m c^2 \cdot h \bar{f} \cdot \cos \varphi$

$$m c^2 = h \bar{f} \cdot (2 - \cos \varphi)$$

Beachtet man, dass die Energie des Photons vor dem Stoß mit $h f = m c^2$ angesetzt war, so folgt über $h f = h \bar{f} \cdot (2 - \cos \varphi) \mid : h \mid : c$ mit $f/c = 1/\lambda$ folgendes Ergebnis:

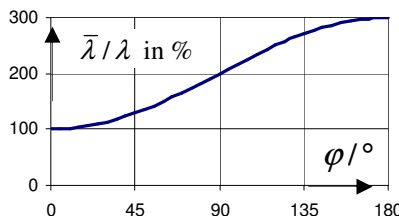
Die relative Wellenlängenvergrößerung des Comptonphotons beträgt

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = 2 - \cos \varphi$$

Für $\varphi = 180^\circ$ ergibt sich eine Verdreifachung der Wellenlänge: $\bar{\lambda} : \lambda = 3 : 1$.

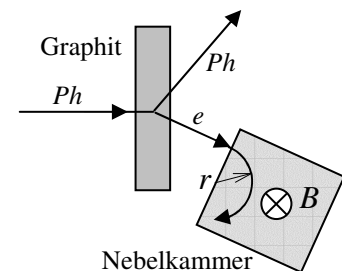
• Ausgangswellenlänge $\bar{\lambda}$ geteilt durch Eingangswellenlänge λ in Prozent:

- $\varphi = 0^\circ$: 100% : $\bar{\lambda}$ bleibt $\lambda = \lambda_c$
- $\varphi = 90^\circ$: 200% : $\bar{\lambda}$ verdoppelt sich.
- $\varphi = 180^\circ$: 300% : $\bar{\lambda}$ verdreifacht sich.



Das Photon verliert beim Comptoneffekt Energie und es ändert seinen Impuls. Beides wird vom Elektron aufgenommen.

Zur endgültigen Bestätigung des *elastischen Stoßvorganges* muss also auch das Elektron nachgewiesen werden. Dies gelang Bothe und Geiger mit einem Koinzidenzversuch in der Nebelkammer: Im homogenen Magnetfeld B wird das Elektron auf eine Kreisbahn gezwungen. Aus dem Radius r schließt man auf seine Geschwindigkeit.

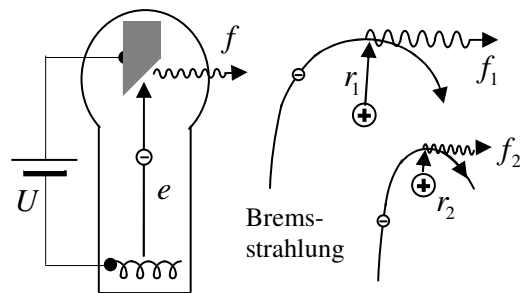


Die bekannte Formel $v = rBe / m_e$ ist hier allerdings nicht anwendbar, sie muss relativistisch korrigiert werden. Die Messergebnisse bestätigten dann die Erwartung.

Der Comptonversuch bestätigte Einsteins Lichtquantenhypothese ein zweites mal eindrucksvoll. Licht besteht also aus massebelegten Teilchen, welche Stöße ausführen können und so z.B. den Strahlungsdruck ein weiteres mal verständlich machen. Andererseits sind die *Teilchengrößen Masse* und *Impuls* durch die *Wellengröße Frequenz* bestimmt und am Beugungsgitter kommt es durch Interferenz zu Verstärkung und Auslöschung. Die Auslöschung ist für Teilchen nicht vorstellbar, sie blieb lange ein Rätsel. Diese zunächst widersprüchliche Doppelnatur wird *Dualismus* genannt. Der Dualismus ist ein tiefer liegendes Phänomen, denn 1924 zeigte *De Broglie*, dass er auch für Elektronen, also für „feste Materie“ gilt.

IV) Die Röntgenkante.

In der Röntgenröhre werden Elektronen durch eine Spannung U beschleunigt. Ihre kinetische Energie ergibt sich dann aus $e \cdot U = \frac{1}{2} m v^2$. Die Elektronen schlagen auf eine abgeschrägte Anode. Bei entsprechend hoher Spannung wird Röntgenlicht abgestrahlt. Wie erklärt sich das im Bild der EM-Welle und welche Frequenzen sollten abgestrahlt werden?



Die Elektronen schießen durch die Elektronenhülle der Atome der obersten Schicht des Anodenmaterials. In Kernnähe erfahren sie dann eine starke Radialbeschleunigung, so dass sie eine mehr

oder weniger enge Kurve um den Kern ziehen. Die Abstrahlung der EM-Welle erfolgt wie in der Antenne *senkrecht* zur Beschleunigungsrichtung, in der Kurve also tangential zum Bahnverlauf.

Die Frequenz ergibt sich überschlägig aus der „Planetenformel“ $f = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{e^2}{\pi^3 \epsilon_0 m_e r^3}}$ des Kapitels

B2a), weil näherungsweise ein Stückchen Kreisbahn durchlaufen wird. Da die Kerne von den Elektronen in allen möglichen Abständen umflogen werden, kommen auch kleinste Werte von r vor. Daher sollte ein breites Frequenzspektrum bis zu aller höchsten Werten abgestrahlt werden.

Tatsächlich gibt es eine Frequenzobergrenze. Die „Röntgenkante“ liegt bei $f = e \cdot U / h$. Man sieht sofort, dass dies nur durch die Lichtquantenhypothese und das „1 zu 1-Prinzip“ erklärbar ist.

V) Strahlungsdruck im Photonenbild

Fällt Licht der Intensität $I_{EM} = \frac{\Delta W}{A \cdot \Delta t}$ während der Zeitspanne Δt senkrecht auf eine Fläche der

Größe A , so wird die Energie $\Delta W = I_{EM} \cdot A \cdot \Delta t$ auf die Fläche übertragen. Hat das Licht die Fre-

quenz f , so heißt dies im Photonenbild, dass $n_{ph} = \frac{\Delta W}{h f} = \frac{I_{EM} \cdot A \cdot \Delta t}{h f}$ Photonen auf die Fläche

schlagen. Jedes Photon besitzt den Impuls $p_{ph} = m_{ph} \cdot c = \frac{h f}{c^2} \cdot c = \frac{h f}{c}$. Ist die beleuchtete Fläche

ideal spiegelnd, so verlassen die Photonen die Oberfläche mit einem betragsmäßig gleich großen Impuls umgekehrten Vorzeichens. Die auf den Spiegel übertragene Impulsänderung beträgt dann

pro Photon $\Delta p_{ph} = \frac{2 h f}{c}$. Damit nimmt der Spiegel die Gesamtimpulsänderung

$\Delta p_{ph, Ges} = n_{ph} \cdot \frac{2 h f}{c} = \frac{I_{EM} \cdot A \cdot \Delta t}{h f} \cdot \frac{2 h f}{c} = \frac{2 I_{EM} \cdot A \cdot \Delta t}{c}$ auf. Während der Bestrahlung erfährt der

Spiegel somit die Kraft $F = \frac{\Delta p_{ph, Ges}}{\Delta t} = \frac{2 I_{EM} \cdot A}{c}$. Weil Druck gleich Kraft durch Fläche ist, übt

das Licht während der Bestrahlung auf den idealen Spiegel somit den Druck $p = \frac{F}{A} = \frac{2 I_{EM}}{c}$ aus.

Interessanterweise ist der Strahlungsdruck, wie im Bild der EM-Welle, auch im Photonenbild *frequenzunabhängig*. Der Strahlungsdruck gibt deshalb keinen Hinweis auf die Photonennatur des Lichtes. Der Grund: Bei höheren Frequenzen und gleicher Intensität übertragen weniger Photonen jeweils eine größere Impulsänderung, so dass sich beide Effekte aufheben.

D) Die moderne Quantentheorie. (1924 – heute)

I) Materiewelle von Louis De Broglie (1924), Dualismus.

- Nach Planck müssen die Bewegungsmöglichkeiten der atomaren Oszillatoren extrem eingeschränkt (quantisiert) sein, damit sich das richtige Strahlungsgesetz ergibt. Plancks Quantisierungskonzept erschien jedoch willkürlich, man fand zunächst keinen *anderen* Anwendungsfall.
- Ebenso bezog sich Einsteins Lichtquantenhypothese von 1905 ausschließlich auf den Photoeffekt. Erst Compton zeigte 1922, dass Einsteins Hypothese auch anderweitig erfolgreich ist. Nun suchte man die Ursache der Quantisierung. *Louis De Broglie* schaffte den Durchbruch:
- Die Quantisierung beruht auf einem *Wellencharakter*, welcher nicht nur dem Licht, sondern auch der Materie zukommt. De Broglie postulierte für *alle* Objekte der Physik den Dualismus von Teilchen und Welle. Als „Scharnier“ zwischen dem Wellen- und Teilchenbild der physikalischen Objekte fungiert als übergeordnete Größe die *Energie*.

Ausgedrückt durch Teilchengrößen besitzt das Photon die Energie $W = m \cdot c^2$.

Ausgedrückt durch Wellengrößen besitzt das Photon die Energie $W = h f = h \cdot c / \lambda$.

Gleichsetzen und Umstellen liefert die „Dualismusgleichung“ $\lambda = \frac{h}{m \cdot c}$, welche die Teilchengröße „Masse“ = m mit der Wellengröße „Wellenlänge“ = λ verbindet.

- d) De Broglie übertrug diese Gleichung nun auf *Materieteilchen* der Masse m , indem er die Lichtgeschwindigkeit c willkürlich durch die Teilchengeschwindigkeit v ersetzte.

Die Wellenlänge der „Materiewelle“ eines Teilchens der Masse m beträgt somit

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$$

- e) Der erste Anwendungserfolg der De Broglie-Gleichung war die nachträgliche Rechtfertigung des erfolgreichen, aber zunächst willkürlich angesetzten *Bohr*'schen Atommodells von 1913: Von allen möglichen Bahnen des Elektrons um den Wasserstoffkern sind *nur* diejenigen zulässig, auf deren Umfang ein *ganzzahliges* Vielfaches der Wellenlänge λ passt. Nur auf diesen Bahnen wird die „Selbstausslöschung“ der Materiewelle vermieden.
- f) Als nächstes gelang *Davisson* und *Germer* 1927 der direkte Nachweis des Wellencharakters der Elektronen. Beim Elektronenbeschuss eines Kristallgitters zeigen sich Interferenzbilder. Mit z.B. $U = 5 \text{ kV}$ werden die Elektronen auf $v = \sqrt{2Ue/m_e} \approx 4,2 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ beschleunigt, wodurch sie die Wellenlänge $\lambda = 17,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ erhalten. Das entsprach den Beugungsbildern.

Trotz allem liefert die De Broglie-Gleichung nur Überschlagsrechnungen ohne echte Herleitung

- g) Das Problem: Die „normale“ Frequenz-Wellenlängen-Beziehung $v = \lambda \cdot f$ gilt nicht mehr. Deshalb griff Schrödinger für die Frequenz auf die Einsteingleichung $W = h \cdot f$ zurück: Für das freie Teilchen mit $W = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ folgt dann $h \cdot f = \frac{1}{2} m \cdot v^2$. Setzt man jetzt noch $v = h/(m \cdot \lambda)$ ein, so ergibt sich nach Formelumstellung $\lambda^2 \cdot f = h/2m = \text{const}$.
- Für die Lichtwelle ist $\lambda \cdot f = c$ konstant, für die Materiewelle hingegen $\lambda^2 \cdot f$.
- Deshalb gehorchen Licht- und Materiewellen auch völlig unterschiedlichen Gleichungen.
- h) Bei der Lichtwelle schwingen die el. und magn. Feldstärke. Was schwingt bei der Materiewelle?
- i) Schrödinger nannte die Auslenkungsgröße Ψ , auch um das Mysteriöse darin auszudrücken.
- j) Die Lichtwelle gehorcht den Maxwell-Gleichungen. Welche Gleichung steuert $\Psi(x, t)$?
- k) Welche physikalische Messgröße ist mit der Auslenkung Ψ der Materiewelle verknüpft?

II) Schrödinger-Gleichung (1926) zur Berechnung der Auslenkung Ψ der Materiewelle.

- 1) Als Vorbild für das Verhalten von Ψ diene das Verhalten z.B. der elektrischen Feldstärke $E(x, t) = \hat{E} \sin 2\pi (x/\lambda - f \cdot t)$ in der EM-Welle. Zweimaliges Ableiten sowohl nach t als auch nach x liefert hier $\ddot{E}(x, t) = -f^2 \cdot 4\pi^2 \cdot E(x, t)$ bzw. $E''(x, t) = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot E(x, t)$. Kürzen ergibt $\ddot{E}/E'' = (\lambda f)^2 = c^2 = \text{const}$. Also sind für Licht die *zweiten* Abl. zueinander proportional.

Die Konstante der Materiewelle ist aber nicht $f^2 \cdot \lambda^2 = c^2$, sondern $\lambda^2 \cdot f = h/2m$. Für ein klassisches Teilchen ist nämlich m eine konstante Größe. (Beim Photon ist $m \sim f$ variabel)

Deshalb müssen die *zweite* Ableitung nach x , also Ψ'' , und die *erste* Ableitung nach t , also $\dot{\Psi}$, proportional zu einander sein. Die zweite Abl. macht aus einer Sinusfunktion wieder eine Sinusfunktion. Die erste Abl. tut das nicht. Nur die e -Funktion reproduziert sich bei einmaligem Ableiten. Weil eine Welle aber periodisch und nicht wachsend bzw. fallend ist, muss das x in e^x durch $i x$ ersetzt werden (mit $i = \text{im. Einheit}$ $i^2 = -1$). Der Ansatz $\Psi(x, t) = \hat{\Psi} e^{2\pi i \cdot (x/\lambda - f \cdot t)}$ reproduziert sich dann bzgl. der 2. Ableitung nach x und der 1. Ableitung nach t .

2) Aufstellen der Schrödingergleichung:

Einmal nach t ableiten liefert $\dot{\Psi}(x,t) = -2\pi \cdot i \cdot f \cdot \Psi(x,t)$.

Zweimal nach x ableiten: $\Psi''(x,t) = \frac{4\pi^2 \cdot i^2}{\lambda^2} \cdot \Psi(x,t) = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot \Psi(x,t)$.

$\Psi(x,t)$ eliminieren liefert $\frac{\dot{\Psi}}{\Psi''} = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{h}{2m}$. Mit $1/i = -i$ folgt $\dot{\Psi}(x,t) = -\frac{h/(2\pi)}{2m \cdot i} \cdot \Psi''(x,t)$.

$h/2\pi$ wird durch \hbar abgekürzt. Damit entsteht die Schrödingergleichung für die Materiewelle

ein freies Teilchen der Masse m :
$$\dot{\Psi}(x,t) = -\frac{\hbar}{2m \cdot i} \cdot \Psi''(x,t)$$
.

III) Anmerkungen zur Schrödingergleichung.

- 1) Die Schrödingergleichung enthält die *erste* Ableitung nach der Zeit und ähnelt insofern der zweiten Newton'schen Gleichung $\dot{v} = F/m$. Diese gibt an, wie sich die Geschwindigkeit, also das „Werden“ des Körpers zeitlich ändert. Das „Werden“ können wir nicht visualisieren. Ebenso wenig können wir die Ψ -Funktion visualisieren: Sie ist komplexwertig.

In der klassischen Mechanik durchfliegt ein Körper bei Kräftefreiheit jeden Ort x mit derselben Geschwindigkeit. Im Geschwindigkeits(Impuls)raum steht der Körper daher „still“. Die Beziehung zwischen „Sein“ und „Werden“, also die Beziehung zwischen Ort und Impuls, regelt hier die Differentialrechnung mit einem *unphysikalischen* Limes $\Delta t \rightarrow 0$. Die kräftefreie Schrödingergleichung liefert eine ebene Welle, deren Auslenkung an jeder Stelle x mit $e^{-2\pi i \cdot f \cdot t}$ in der komplexen Zahlenebene *rotiert*. Ein „stillstehendes Werden“ gibt es in der Quantenmechanik nicht: Zwischen „Sein“ und „Werden“ besteht ein permanenter „Konflikt“, welcher in der Heisenbergschen Unschärferelation zum Ausdruck kommt.

- 2) Wahrscheinlichkeitsinterpretation: Läuft eine ebene Wasserwelle auf eine Blende mit *zwei* Löchern zu, so überlagern sich die austretenden Kreiswellen hinter dem Doppelspalt, sodass sich durch Auslöschung und Verstärkung ein Interferenzmuster bildet. Bestrahlt man einen Doppelspalt mit Licht oder Elektronen, so erhält man entsprechendes. Das wird im Wellenbild verständlich. Mit Ψ_1 und Ψ_2 ist nämlich auch $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ Lösung der Schrödingergleichung. Nun besteht Licht bzw. der Elektronenstrahl aber aus Teilchen. Wie findet man deren Ort auf dem Schirm? Experimentell regelt man die Intensität der Strahlung so weit herunter, bis nur noch ein Teilchen z.B. pro Stunde austritt. Auf dem Schirm sieht man dann stündlich willkürliche Einschläge. Nach monatelanger Laufzeit bildet sich jedoch das Interferenzmuster heraus. Da die Teilchen nichts von einander „wissen“, muss die Interferenzbildung in jedem Messvorgang *einzel*n angelegt sein. Ein Verständnis dafür erhält man, wenn man beim Messprozess *zwei* Quantenobjekte berücksichtigt. Einmal das Teilchen, zum anderen den Zähler, der es nachweisen soll.

Jedes Quantenobjekt simuliert man durch einen Würfel:

Der *erste* Würfel repräsentiert das Teilchen und heißt „Teilchenwürfel“.

Mit ihm erwürfelt man einen Ort x auf dem Schirm. Durch Lösen der Schrödingergleichung steht dann der Wahrscheinlichkeit $P = |\Psi(x)|^2 \cdot \Delta x$ für diesen Ort fest. Es gilt $0 \leq P \leq 1$.

Der *zweite* Würfel repräsentiert den Zähler an dem Ort. Er heißt „Zählerwürfel“. Dieser Würfel erwürfelt unabhängig vom ersten Wurf die Messbereitschaft $0 \leq Q \leq 1$ des Zählers.

Für $Q \geq P$ erfolgt ein Einschlag, andernfalls bleibt er aus.

Durch diese Simulation entsteht entsteht sukzessive dasjenige Interferenzbild, welches auch von einer realen Messung geliefert wird. In dieser Simulation müsste „Gott“ für jeden Einschlag nicht nur einmal, sondern sogar zweimal würfeln.

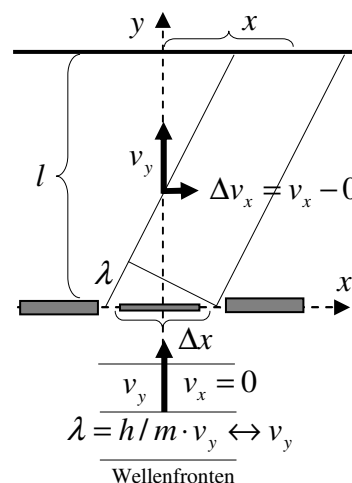
IV) Heisenbergsche Unschärferelation (1927)

Ein Elektron fliege parallel zur y -Achse durch einen Spalt der Breite Δx und lande dann auf einem Schirm im Abstand l . Durch die Beugung erhält es eine Geschwindigkeitskomponente Δv_x zum 1. Beugungsmaximum. Im Teilchenbild gilt

$\Delta v_x / v_y = x / l$. Im Wellenbild ist das 1. Beugungsmaximum für kleine Winkel gegeben durch $\lambda / \Delta x = x / l$. Gleichsetzen und Einsetzen von $\lambda = h / m \cdot v_y$ bzw. $v_y = h / m \cdot \lambda$ ergibt

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{x}{l} = \frac{\Delta v_x}{v_y} = \frac{\Delta v_x \cdot m \cdot \lambda}{h} \quad \text{bzw. nach Kürzen und Umstellen}$$

$\Delta x \cdot m \cdot \Delta v_x = h$. Mit $m \cdot \Delta v_x = \Delta p_x$ gleich der Impulsänderung in x -Richtung ergibt sich $\Delta x \cdot \Delta p_x = h$. Das Elektron kann auch



zum 2. usw. Beugungsmaximum fliegen, dann wird der seitliche Impuls Δp_x größer. Daher gilt allgemein $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$. Heisenbergs Unschärferelation ist eine Folge des Dualismus von Teilchen und Welle. Sie zeigt erneut die zentrale Bedeutung des Planckschen Wirkungsquantum. Mittels der Unschärferelation kann man viele Frage auf einfache Weise überschlägig beantworten. Beispiele:

- Die Energieniveaus im Harmonischen Oszillator, im Wasserstoffatom, im Potentialtopf usw. sind grob gesagt nach h -Portionen gestuft.
- Z.B. treten beim β -Zerfalls von Atomkernen Elektronen aus, so dass man anfangs dachte, das Neutron sei eine Zusammensetzung aus Proton und Elektron. Dann müsste aber $\Delta x \approx d_{\text{Neutron}}$ sein. Der winzige Wert hätte jedoch einen Impuls Δp zur Folge, welcher nicht einmal von der Kernkraft gehalten werden kann. Der Ansatz war somit falsch.

Die Unschärferelation lässt sich auf *alle* Größenpaare übertragen, deren Produkt die Maßeinheit *Joule* \times *Sekunde* hat. So gibt es auch eine Unschärferelation zwischen Energie und Zeit, woraus sich der Tunneleffekt und die vorübergehende Existenz virtueller Teilchen aller Art erklären lässt. Eine weitere Unschärferelation besteht zwischen Drehimpuls und Drehwinkel.

In der klassischen Physik basiert die Berechnung der Bahnkurve auf der präzisen Angabe der Anfangsbedingungen von z.B. Ort und Geschwindigkeit bzw. Impuls. Die Unschärferelation verhindert dies für die Quantentheorie, so dass diese Theorie im Vergleich zur klassischen Mechanik nur *halb* so viel Information liefert. Dennoch haben bisher alle Experimente gezeigt, dass die Quantenmechanik *vollständig* ist.

Nur unser Anschauungsbedürfnis danach, dass die Geschwindigkeit dem Ort nachgeordnet ist, weil in der klassischen Mechanik $v = \dot{x}$ gilt, dieses Bedürfnis wird verletzt. Ort und Impuls sind gleichwertig. Sie lassen sich nicht auseinander herleiten, sie stehen im Kontrast zu einander. Ja, die Objekte ein und dieselbe Welt lassen sich einerseits im Ortsbild durch ihre Orte, aber andererseits ebenso im Impulsbild durch ihre Impulse vollständig darstellen.