Roter Faden Physik

https://roter-faden-physik.de/

Wechselstrom

4. Auflage

von

Dr. Ortwin Fromm

Evangelische Schule Frohnau, Berlin

A) Grundlagen

a) Bedeutung des Wechselstroms

Wechselstrom entsteht durch periodisches Umpolen der Stromrichtung. Die einfachste Form ist der sinusförmige Wechselstrom. Andere Wechselstromformen, wie die Sägezahn- oder die Rechteckform, können als Fouriersummen von Sinusformen angesehen werden. Deshalb beschäftigen wir uns weiterhin nur mit sinusförmigen Wechselströmen. Technisch wird Wechselstrom im Generator durch eine in einem Magnetfeld rotierende Leiterschleife erzeugt, wobei die induzierte Spannung an den Leiterschleifenenden über zwei *nicht* unterbrochene Schleifringe abgegriffen wird.
Während das elektrische Wechselfeld sich nahezu mit Lichtgeschwindigkeit über den Stromkreis ausbreitet, bewegen sich die Elektronen im Leiter z.B. innerhalb einer $50Hz$ Periode nur um Bruchteile von Mikrometern hin und her. Sie führen also nur winzige Zitterbewegungen aus, die man nicht als Strömung bezeichnen kann.
Der Wechselstrom wird in einem Generator ohne Polwender auf einfache Weise erzeugt.
Er kann, zum Zwecke der verlustarmen Fernübertragung, auf kleine Werte herunter transformieren werden, wobei die Spannung entsprechend steigt. Kleine Ströme bedeuten nämlich kleine Übertragungsverluste.
Getaktete, amplituden- bzw. frequenzmodulierte Wechselströme und -spannungen verwendet man auch zur Daten- und Informationsübertragung. Der Frequenzbereich erstreckt sich über den *NF* (Niederfrequenz-), *MF* (Mittelfrequenz-) und *HF* (Hochfrequenzbereich) von einigen Hertz bis zu *GHz* und *THz*.

b) Funktionsgleichung, Amplitude, Frequenz, Phasenwinkel

Nach obiger Festlegung sind Strom und Spannung also sinusförmige Funktionen der Zeit.
$I(t) = \hat{I}\sin\left[\omega(t - t_{0,I})\right]$ und $U(t) = \hat{U}\sin\left[\omega(t - t_{0,U})\right]$.

Die $[...]$ wird jedoch zukünftig weggelassen, es ist unüblich sie zu schreiben.

Der konstante Vorfaktor heißt *Amplitude* und erhält die Kennzeichnung „Dach“.
Die Frequenz f gibt die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde an und besitzt die Maßeinheit Hertz $Hz = s^{-1}$. Die Periodenlänge bzw. *Schwingungsdauer* T ist der Kehrwert der Frequenz $T = 1/f$ mit der Maßeinheit s. Für die *Kreisfrequenz* gilt $\omega = 2\pi f$, (Maßeinheit ebenfalls s).

Die Zeiten $t_{0,U}$ und $t_{0,I}$ sind die „ersten“ Nulldurchgänge von Spannung und Strom.

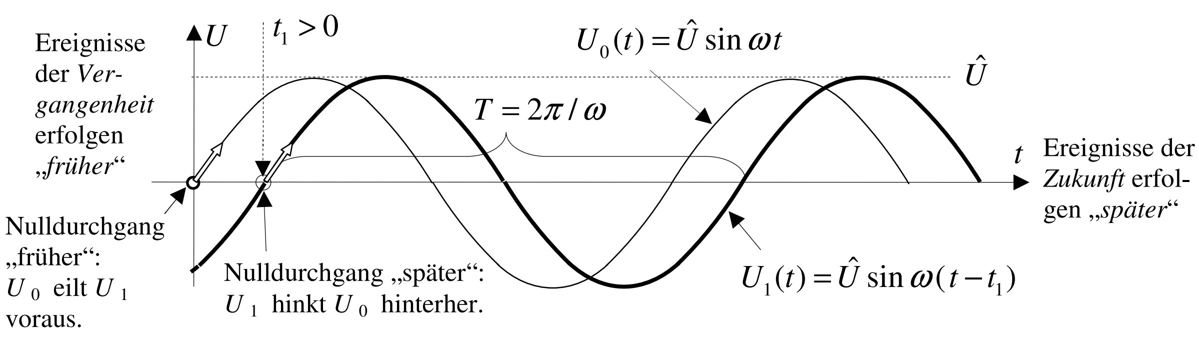
Das Argument der Sinusfunktion bezeichnet man auch als *Phasenwinkel* oder *Phase* φ.

Die Phase $\varphi(t) = \omega(t - t_{0,U}) = \omega t - \omega t_{0,U}$ ist eine lineare Funktion der Zeit.

Der Wert $\omega t_{0,U}$ gibt die *Phasenverschiebung* gegenüber der „normalen“ Sinuskurve an.

Vorauseilen und Nachhinken.

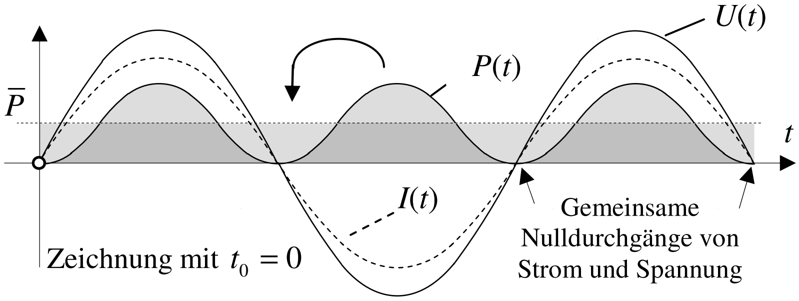
Ist z.B. der Zeitpunkt t_1 des „ersten“ Nulldurchganges eines sinusförmigen Spannungsverlaufes $U_1(t)$ *größer* als null, so *hinkt* $U_1(t)$ der Ursprungskurve $U_0(t) = \hat{U}\sin\omega t$ hinterher.



c) Spannung, Strom, Leistung, Effektivwerte

1) Spezialfall: Die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung sei null.
Am Ohmschen Widerstand R sind Strom und Spannung *in Phase*, d.h., ihre Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_{0,I} - \varphi_{0,U} = 0$. Die Nulldurchgänge fallen hier also zusammen.

Sei $U(t) = \hat{U}\sin\omega(t-t_0)$ vorgegeben. Dann ergibt sich $I(t) = \hat{I}\sin\omega(t-t_0)$ mit $\hat{I} = \hat{U}/R$.
Jetzt betrachten wir die elektrische *Leistung* (in *Watt*) $\boxed{P(t) = U(t)\cdot I(t)}$, sie ist ebenfalls zeitabhängig. Wegen $P(t) = \hat{U}\,\hat{I}\cdot[\sin\omega(t-t_0)]^2 \geq 0$ ist $P(t)$ jedoch stets $\geq$ null.



Durch „Abschneiden" der „Kuppen" und „Einlegen" in die „Täler" erhält man den zeitlichen Mittelwert $\overline{P}$ der Leistung.

$P(t)$ pendelt zwischen Null und $\hat{U}\cdot\hat{I}$ hin und her. Ergebnis der Mittelwertbildung:

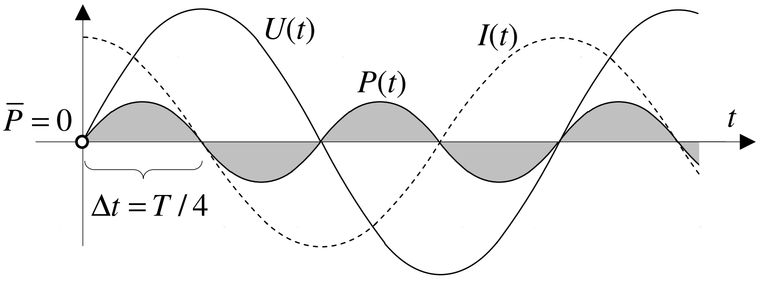
Eine Wechselspannung bewirkt an R im Mittel die Leistung $\overline{P} = \hat{U}\cdot\hat{I}/2 = \hat{U}^2/2R$.

Man fragt nun, welche *Gleich*spannung U_{eff} *ersatzweise* an R angelegt werden müsste, um die *gleiche* Leistung zu erhalten.
Bei angelegtem U_{eff} fließt der Strom $I_{eff} = U_{eff}/R$, sodass sich $P = U_{eff}^2/R$ ergibt.
Der Vergleich $U_{eff}^2/R = \hat{U}^2/2R$ führt auf $U_{eff} = \hat{U}/\sqrt{2}$. Bei dieser Gleichspannung fließt der Gleichstrom $I_{eff} = \hat{I}/\sqrt{2}$. Probe: $U_{eff}\cdot I_{eff} = \left(\hat{U}/\sqrt{2}\right)\cdot\left(\hat{I}/\sqrt{2}\right) = \hat{U}\cdot\hat{I}/2$ ✓

Die *Effektivwerte* von Wechselstrom und -spannung sind $U_{eff} = \dfrac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$, $I_{eff} = \dfrac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$.   Eine Gleichspannung mit dem Wert $U_{eff} = \hat{U}/\sqrt{2}$ bewirkt an einem Widerstand R im zeitlichen Mittel den *gleichen* Leistungs(Wärme)umsatz, wie eine Wechselspannung mit der Amplitude $\hat{U}$. Die Frequenz spielt keine Rolle.

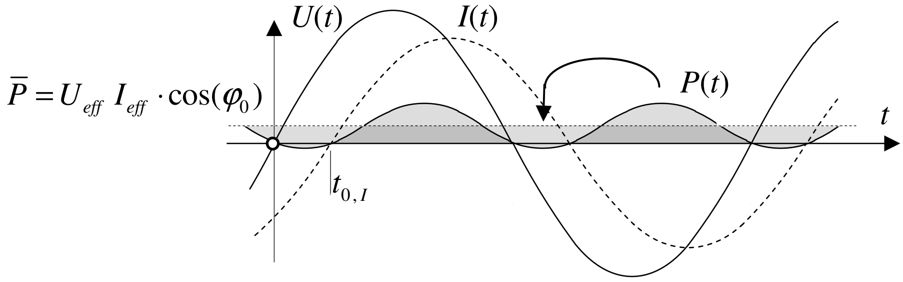
Zahlenbeispiel: Für $U_{eff} = 220V$ ergibt sich die Scheitelspannung $\hat{U} = \sqrt{2}\cdot 220V \approx 311V$.

2) Spezialfall: Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung = $\pm 90°$ bzw. $\pm\pi/2$
Für $\Delta\varphi = \varphi_{0,I} - \varphi_{0,U} = \pm\pi/2$ schwankt das Produkt $P(t) = U(t)\cdot I(t)$ um die t-Achse, sodass der Mittelwert über eine Periode *null* ist. Der Verbraucher nimmt daher im Mittel *keine* Leistung auf. *Dennoch* flutet Leistung zwischen Generator und „Verbraucher" hin und her und belastet die Leitungen des Stromkreises.



3) Wirkleistung bei beliebigem Phasenwinkel

Im Allgemeinen ist der Strom gegenüber der Spannung um einen gewissen Phasenwinkel $\Delta\varphi$, mit $-\pi/2 \le \Delta\varphi \le \pi/2$, verschoben. In diesem Fall schwankt die Leistungskurve $P(t) = U(t)\cdot I(t)$ um einen oberhalb der *t*-Achse liegenden Mittelwert. Dieser repräsentiert die *Wirkleistung*, welche im Mittel vom Verbraucher aufgenommen wird.



Zur rechnerischen Vereinfachung wird die Spannungskurve mit $t_{0,U} = 0$ angesetzt.

Dann gilt $U(t) = \hat{U}\sin\omega t$ und $I(t) = \hat{I}\sin\omega(t - t_{0,I}) = \hat{I}\sin(\omega t - \varphi_0)$, mit $\varphi_0 = \omega t_{0,I}$.

Anwendung der Formel $\sin\alpha\cdot\sin\beta = 1/2\cdot\cos(\alpha-\beta) - 1/2\cdot\cos(\alpha+\beta)$

liefert $P(t) = \hat{U}\,\hat{I}\sin\omega t\cdot\sin(\omega t - \varphi_0) = 1/2\cdot\hat{U}\,\hat{I}\cos\varphi_0 - 1/2\cdot\hat{U}\,\hat{I}\cos(2\omega t - \varphi_0)$.

Der erste Summand $1/2\cdot\hat{U}\,\hat{I}\cdot\cos\varphi_0 = U_{eff}\, I_{eff}\cdot\cos\varphi_0$ ist zeitlich konstant.

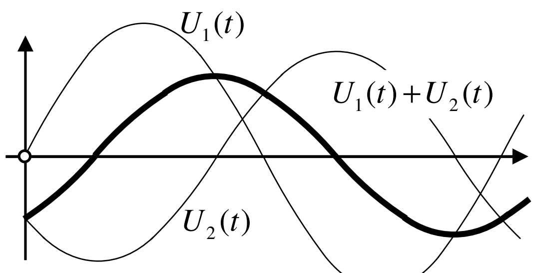
Er liefert die Wirkleistung $\boxed{\overline{P}_W = U_{eff}\, I_{eff}\cdot\cos\Delta\varphi_0}$. Im Datenblatt von Elektromotoren wird der „cos φ“-Wert i.A. angegeben.

Der zweite Summand $-1/2\cdot\hat{U}\,\hat{I}\cos(2\omega t - \varphi_0)$ oszilliert wie in c)1) mit doppelter Frequenz um die t-Achse, sodass dessen Mittelwert über eine Periode *null* ist.

d) **Zeigerdarstellung** von Wechselgrößen

1) Problemstellung

Wird eine Schaltung durch eine Wechselspannung der Kreisfrequenz ω angesteuert, so stellen sich innerhalb der Schaltung Spannungen und Ströme ein, die *sämtlichst auch* Wechselgrößen der Kreisfrequenz ω sind. Doch stimmen die Amplituden und Phasen i.A. nicht mit denen der eingespeisten Größe überein. Bei der Berechnung treten daher Summen von Wechselgrößen gleicher Frequenz, aber unterschiedlicher Amplitude und Phase auf. Die Berechnung kann mittels der Additionstheoreme durchgeführt werden. Dies ist jedoch sehr aufwändig. Viel eleganter und übersichtlicher erhält man die Summen solcher Wechselgrößen mit Hilfe der Zeigerrechnung. Wie unübersichtlich die Additionstheoreme sind, soll an folgendem „Appetithäppchen“ verdeutlicht werden:

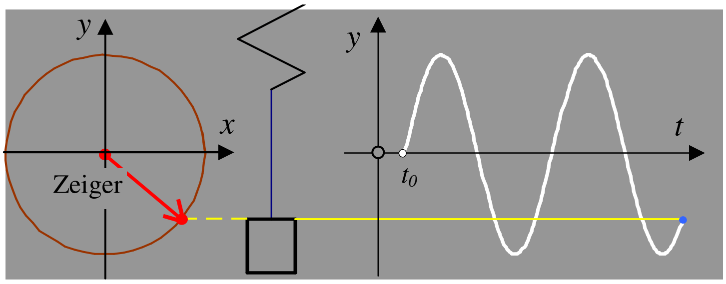


Überlagerung von zwei Sinusfunktionen gleicher Frequenz

Aus $y_1(t) = \hat{y}_1\sin\omega(t - t_1)$ und $y_2(t) = \hat{y}_2\sin\omega(t - t_2)$ folgt für die Amplitude und Phase der Summenfunktion mit Hilfe der Additionstheoreme

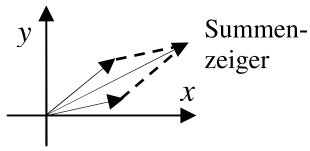
$$y_1(t) + y_2(t) = \underbrace{\sqrt{\hat{y}_1^2 + \hat{y}_2^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2\cos\omega(t_1 - t_2)}}_{\text{Amplitude}}\cdot\sin\left(\omega t - \underbrace{\arctan\frac{\hat{y}_1\sin\omega t_1 + \hat{y}_2\sin\omega t_2}{\hat{y}_1\cos\omega t_1 + \hat{y}_2\cos\omega t_2}}_{\text{Phasenverschiebung}}\right).$$

2) Grundlagen



Dreht man einen Nullpunktspfeil der Länge $\hat{y}$ während der Schwingungsdauer T einmal in mathematisch positivem Sinn um 360°, so liefert die Projektion der Kreisbewegung den Graphen einer Sinusfunktion. Den rotierenden Nullpunktspfeil nennt man auch *Zeiger*.

Der Clou: Die *Summe* zweier *gleich*frequenter Wechselgrößen unterschiedlicher Amplitude und Phase erhält man einfach durch die Projektion des *Summenvektor*s der zugehörigen Vektoren. Die Vektoraddition lässt sich im „zeitlich *eingefroren*“ Zustand durchführen.



3) Mathematische Darstellung von Zeigern

In der Elektrotechnik ist es üblich, Zeiger durch *komplexe* Zahlen zu beschreiben. Das ist aber nicht nötig. Zeiger lassen sich ebenso gut durch *Ortsvektoren* darstellen (deren Schaft ja bekanntlich im Ursprung liegt), wenn man neben dem Skalar- auch das Vektorprodukt nutzt. Aus Platzspargründen schreiben wir die Zeigerkomponenten nicht über-, sondern nebeneinander. So wird z.B. eine zeitliche veränderliche Spannung durch ihre Zeigerstellung $\vec{U} = \left(U_x \middle| U_y\right)$ beschrieben.

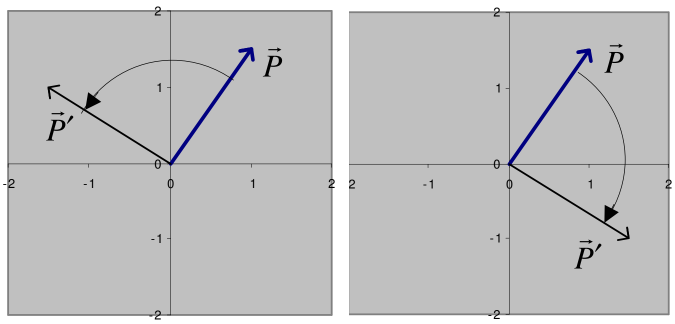
4) Phasenverschiebung von $\pm\,\pi/2$ entspricht in der Zeigerdarstellung Drehung um $\pm\,90°$.

Die *Drehung* eines gegebenen Zeigers $\vec{P} = \left(x \middle| y\right)$ um eine viertel Periode (90°) nach *vorn* ergibt sich durch:

$+90°: \vec{P} = \left(x \middle| y\right) \to \vec{P}' = \left(-y \middle| x\right)$

entsprechend gilt:

$-90°: \vec{P} = \left(x \middle| y\right) \to \vec{P}' = \left(y \middle| -x\right)$



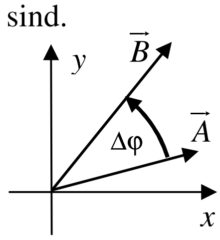
5) Winkel zwischen zwei Zeigern, Skalarprodukt, Vektorprodukt

Gegeben seien die Zeiger $\vec{A} = \left(A_x \middle| A_y\right)$ und $\vec{B} = \left(B_x \middle| B_y\right)$, welche einen Winkel $\Delta\varphi$ einschließen. Dann beträgt das *Skalarprodukt*. $\vec{A}\bullet\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \cos\Delta\varphi$,

wobei die Beträge durch $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ und $\left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$ gegeben sind.

Das *Vektorprodukt* liefert einen Vektor, der senkrecht zur *x*-*y*-Ebene steht. Daher ist nur die *z*-Komponente von null verschieden.

Es gilt $(\vec{A}\times\vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \sin\Delta\varphi$.



Beide Formeln werden nun kombiniert, um den Winkel *von* $\vec{A}$ *nach* $\vec{B}$ *vorzeichenrichtig* durch eine Formel *ohne* Wurzeln zu erhalten.

$$\tan\Delta\varphi = \frac{\sin\Delta\varphi}{\cos\Delta\varphi} = \frac{(\vec{A}\times\vec{B})_z}{\left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right|} \cdot \frac{\left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right|}{\vec{A}\bullet\vec{B}} = \frac{A_x B_y - A_y B_x}{A_x B_x + A_y B_y}$$

ergibt sich die hilfreiche Formel $\boxed{\Delta\varphi = \arctan\frac{A_x B_y - A_y B_x}{A_x B_x + A_y B_y}}$.

Der Ergebnisbereich ist hierdurch auf $-90° \le \Delta\varphi \le 90°$ eingeschränkt

B) Schaltungen

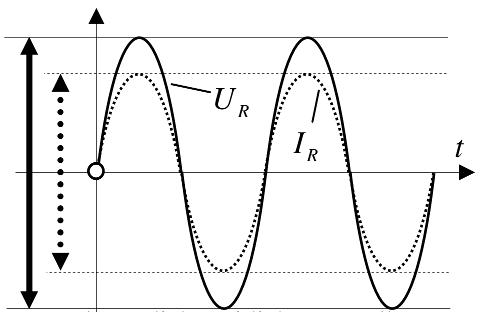
Wir betrachten ausschließlich Schaltungen, welche aus den drei Bauteilsorten R, C und L (Widerstand, Kondensator, Spule) zusammengesetzt sind.
Eine Schaltung erscheint nach außen als „*black box*“ mit zwei Anschlüssen. Die angelegte Spannung $\vec{U}$ ruft dann als „Antwort“ einen Strom $\vec{I}$ hervor.
Diese Zeiger $\vec{U}$ und $\vec{I}$ enthalten *alle* Information über die „Außenwirkung“ der Schaltung.

a) <u>Die *Einzelelemente* R, C und L.</u>

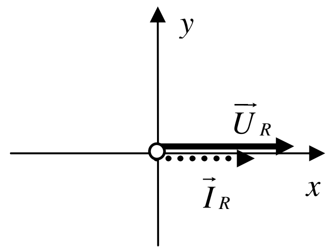
Die *Spannung* wird vorgegeben und der *Strom* ermittelt.
Wir setzen den „ersten“ Nulldurchgang der Spannung auf $t_0 = 0$.
Damit gilt für den Spannungsverlauf $U(t) = \hat{U}\sin\omega t$.

1) <u>Widerstand R</u>

Der Strom $I(t)$ ergibt sich hier nach dem Ohm`schen Gesetz $I(t) = \frac{1}{R}U(t) = \frac{\hat{U}}{R}\sin\omega t$.
Der Strom verläuft also ebenfalls nach einer Sinus-Funktion. Strom und Spannung sind am Widerstand also „*in Phase*“. Für die Amplituden gilt $\boxed{\hat{I} = \hat{U}/R}$ bzw. $\boxed{\hat{U} = R\cdot\hat{I}}$.



Herkömmliche zeitliche Darstellung von Strom und Spannung am Widerstand.



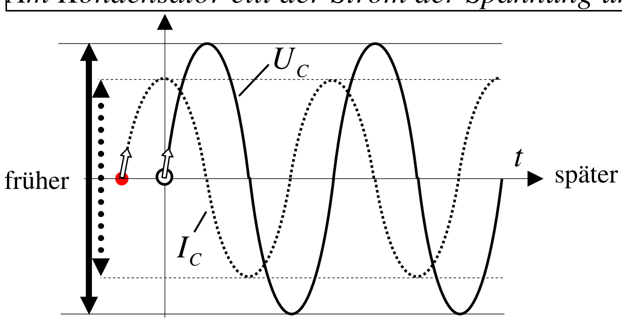
$\vec{U}$ - und $\vec{I}$ - Zeiger am Widerstand R

Zeigerdarstellung: Aus $\vec{U} = \left(\hat{U}\,\middle|\,0\right)$ folgt $\vec{I} = \left(\hat{U}/R\,\middle|\,0\right)$.

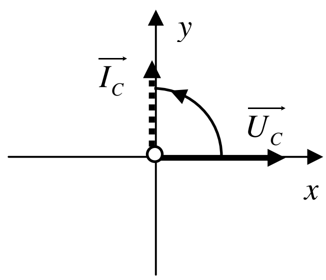
2) <u>Kondensator mit der Kapazität C.</u>

Die vorgegebene Spannung sei wieder $U(t) = \hat{U}\sin\omega t$. Wegen $I(t) = \dot{Q}(t)$ folgt aus $Q = C\cdot U$ durch Ableiten der Strom $I(t) = C\cdot\dot{U}(t) = C\cdot\omega\cdot\hat{U}\cdot\cos\omega t$.
Der Strom verläuft also nach einer Kosinuskurve. Sein „erster“ Nulldurchgang erfolgt eine viertel Periode *früher*, als der „erste“ Nulldurchgang der Spannung. Daher gilt:

Am Kondensator eilt der Strom der Spannung um eine viertel Periode voraus.



Herkömmliche zeitliche Darstellung von Strom und Spannung am Kondensator.



$\vec{U}$ - und $\vec{I}$ - Zeiger am Kondensator C.

Für die Amplituden erhalten wir $\boxed{\hat{I} = \omega C\cdot\hat{U}}$ bzw. $\boxed{\hat{U} = \hat{I}\ /\ \omega C}$.
Der Widerstandswert ist definiert durch das Verhältnis von Spannung zu Strom.

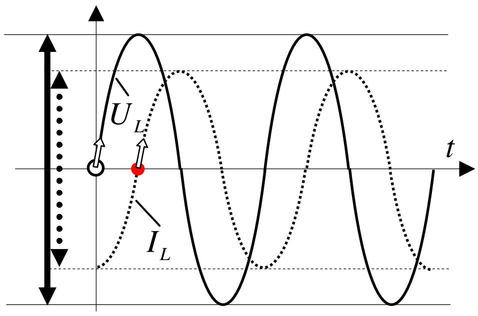
Daher hat der Kondensator den *kapazitiven Widerstand* $\boxed{X_C = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{\underline{\underline{\omega\cdot C}}}}$.

Der kapazitive Widerstand X_C ist umgekehrt proportional zur Frequenz:
Hohe Frequenzen erfahren fast gar keinen Widerstand, für niedrige Frequenzen ist der Widerstand groß. Für Gleichspannung (Wechselspannung der Frequenz $\omega = 0$) beträgt X_C unendlich, denn für Gleichspannung stellt ein Kondensator eine reine Unterbrechung dar.
Für *sämtliche* Frequenzen eilt der Strom der Spannung um 90° voraus.

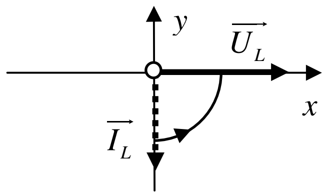
Zeigerdarstellung: Aus $\vec{U} = \left(\hat{U} \,\middle|\, 0\right)$ folgt $\vec{I} = \left(0 \,\middle|\, +\omega C \hat{U}\right)$

3) <u>Spule mit Selbstinduktivität L</u>
Die *angeklemmte* Spannung sei wieder $U(t) = \hat{U} \sin \omega t$. An der Spule gilt $U_{Kl} = +L \cdot \dot{I}$ (siehe RF el-magn WW). Einsetzen von $U(t)$ und integrieren führt zu $I(t) = -\dfrac{\hat{U}}{\omega L} \cos \omega t$.
Der Strom verläuft nach einer „Minus-Kosinuskurve“. Sein „erster“ Nulldurchgang erfolgt daher eine viertel Periode *später*, als der „erste“ Nulldurchgang der Spannung. Es gilt:

An der Spule hinkt der Strom der Spannung um eine viertel Periode nach.



Herkömmliche zeitliche Darstellung von Strom und Spannung an der Spule.



$\vec{U}$ - und $\vec{I}$ - Zeiger an der Spule *L*.

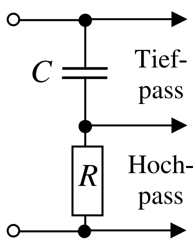
Für die Amplituden gilt: $\boxed{\hat{I} = \hat{U} \;/\; \omega L}$ bzw. $\boxed{\hat{U} = \omega L \cdot \hat{I}}$

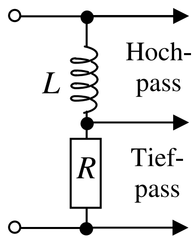
Der *induktive Widerstand* beträgt daher $$X_L = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{\hat{U}}{\hat{U} / \omega \cdot L} = \underline{\underline{\omega \cdot L}}$$

Für niederfrequente Wechselspannungen tendiert der induktive Widerstand gegen null.
Hohe Frequenzen werden von der Spule hingegen zunehmend gesperrt.
Für *sämtliche* Frequenzen hinkt der Strom der Spannung um 90° nach.

Zeigerdarstellung: Aus $\vec{U} = \left(\hat{U} \,\middle|\, 0\right)$ folgt $\vec{I} = \left(0 \,\middle|\, -\dfrac{\hat{U}}{\omega L}\right)$

b) <u>Passschaltungen aus *zwei* Elementen</u>





Passschaltungen wirken als Filter, welche das Frequenzspektrum zweiteilen. Der eine Frequenzbereich wird unterdrückt, der andere weitgehend ungeschwächt durchgeleitet. Auf Grund dessen werden Passschaltungen in der NF-Technik zur Klangregelung eingesetzt. Die einfachsten Passschaltungen sind Reihenschaltungen von Widerstand und Kondensator bzw. von Widerstand und Spule. Eine Reihenschaltung wirkt als Spannungsteiler, an welchem die gewünschte Teilspannung abgegriffen wird. Der Frequenzverlauf soll jetzt mittels *Zeigerdiagramm* und *Zeigerplan* berechnet werden.

0) Aufstellen von Zeigerdiagramm und Zeigerplan für mehrere Bauteile.

Jedem Bauteil (R, C, L) ist ein $\vec{U}$ - und ein $\vec{I}$ - Zeiger zugeordnet.

i. Man sucht zunächst zwei Bauteile, die entweder direkt parallel oder direkt in Reihe liegen, denn in diesem Fall besitzen sie einen *gemeinsamen* Zeiger.

- Bei Parallelschaltung stimmen nach Kirchhoff die Spannungszeiger *überein*.
- Bei Reihenschaltung stimmen nach Kirchhoff die Stromzeiger *überein*.

ii. Der gemeinsame Zeiger wird mit (i.A.) unbekannter Länge x von O aus in Richtung der positiven x-Achse gezeichnet und im Zeigerplan mit $(x|0)$ eingetragen.

iii. Bei gemeinsamem $\vec{U}$ werden jetzt die zu den Bauteilen gehörigen $\vec{I}$ -Zeiger eingezeichnet und in den Zeigerplan eingetragen.
Bei gemeinsamem $\vec{I}$ werden entsprechend die zu den Bauteilen gehörigen $\vec{U}$ -Zeiger eingezeichnet und in den Zeigerplan eingetragen.

iv. Je nach Schaltung wird jetzt addiert, eventuell um $\pm 90°$ gedreht und weiter angesetzt. Im Zeigerplan wird diese Konstruktion dann vektoriell nachvollzogen.

v. Der Plan ermöglicht dann die Berechnung …

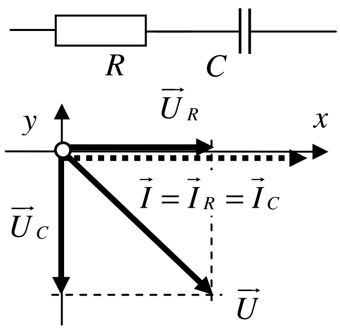
a) sämtlicher *Ströme* und *Spannungen*.

b) der *Impedanz* (des Widerstandes) $Z(\omega) = |\vec{U}(\omega)| / |\vec{I}(\omega)|$ der Gesamtschaltung.

c) der *Phasenverschiebung* $\Delta\varphi(\omega)$ von $\vec{U}$ *nach* $\vec{I}$.

d) der frequenzabhängigen *Wirkleistung* $\bar{P}_W = U_{eff}\, I_{eff} \cdot \cos\Delta\varphi$.

1) <u>Die *RC*-Reihenschaltung: Hier stimmen die *Strom*zeiger überein.</u>



	Zeigerplan für die *RC*-Reihenschaltung			
	Strom		Spannung	Bem.
1	$\vec{I}_R = (x\|0)$	4	$\vec{U}_R = (xR\|0)$	$x = ?$
2	$\vec{I}_C = (x\|0)$	5	$\vec{U}_C = \left(0 \middle\| -\frac{x}{\omega C}\right)$	
3	$\vec{I} = x(1\|0)$	6	Summe: $\vec{U} = x \cdot \left(R \middle\| -\frac{1}{\omega C}\right)$	$\|\vec{U}\| = \hat{U}$ liefert x

<u>Auswertung des Zeigerplans</u>:

<u>*Gegeben*</u>: R, C, $\hat{U} = |\vec{U}| = \sqrt{2} \cdot U_{eff}$, ω . <u>*Gesucht*</u>: x, $\hat{I} = \hat{I}_R = \hat{I}_C, \hat{U}_R, \hat{U}_C, Z, \Delta\varphi$

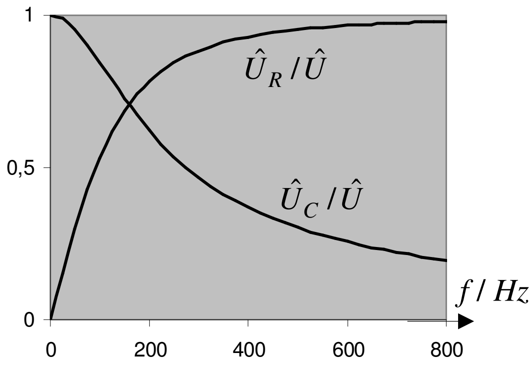
Die Unbekannte x ergibt sich durch Betragsbildung aus Fach 6. Daraus folgt der Rest:

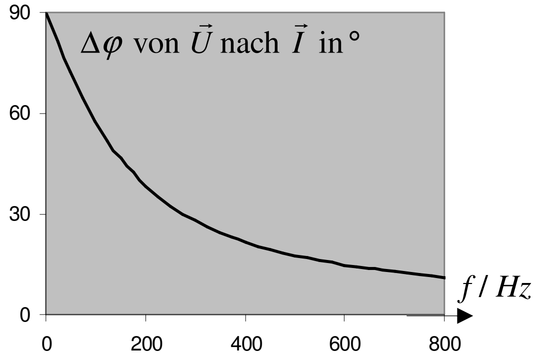
$$x(\omega) = \hat{I} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}, \quad \hat{U}_R = |\vec{U}_R| = \frac{\hat{U} \cdot R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}, \quad \hat{U}_C = |\vec{U}_C| = \frac{\hat{U}}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}}$$

Impedanz (Widerstand) $$Z(\omega) = \frac{|\vec{U}|}{|\vec{I}|} = \frac{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} = \frac{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}{1} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

$$\Delta\varphi(\omega) = \arctan\frac{(\vec{U} \times \vec{I})_z}{\vec{U} \bullet \vec{I}} = \arctan\frac{U_x I_y - U_y I_x}{U_x I_x + U_y I_y} = \arctan\frac{R \cdot 0 - \left(-\frac{1}{\omega C}\right) \cdot 1}{R \cdot 1 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right) \cdot 0} = \arctan\frac{1}{\omega RC}$$

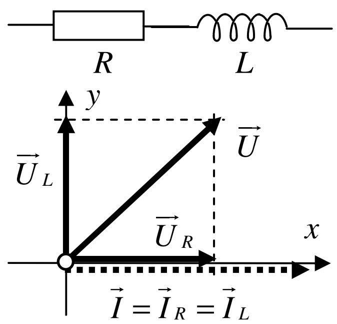
Beispiel: $R = 50\,\Omega$; $C = 20\mu F$





Die Filterfunktion ist gut erkennbar

2) <u>Die *RL*-Reihenschaltung: : Hier stimmen die *Strom*zeiger überein.</u>



	Zeigerplan für die *RL*-Reihenschaltung			
	Strom		Spannung	Bem.
1	$\vec{I}_R = (x \| 0)$	4	$\vec{U}_R = (xR \| 0)$	$x = ?$
2	$\vec{I}_L = (x \| 0)$	5	$\vec{U}_L = (0 \| x\omega L)$	
3	$\vec{I} = x(1 \| 0)$	6	Summe: $\vec{U} = x \cdot (R \| \omega L)$	$\lvert\vec{U}\rvert = \hat{U}$ $\to x$

<u>Auswertung des Zeigerplans:</u>

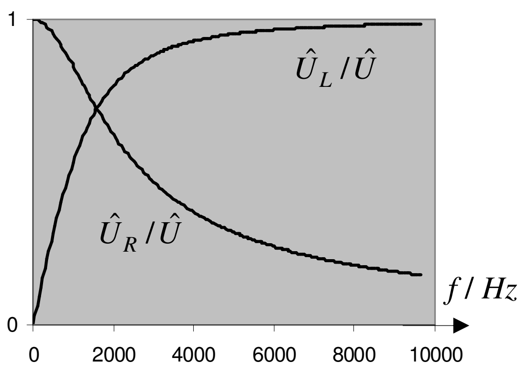
<u>*Gegeben*</u>: R, L, $\hat{U} = \left|\vec{U}\right| = \sqrt{2} \cdot U_{eff}$, ω. <u>*Gesucht*</u>: x, $\hat{I} = \hat{I}_R = \hat{I}_L, \hat{U}_R, \hat{U}_L, Z, \Delta\varphi$

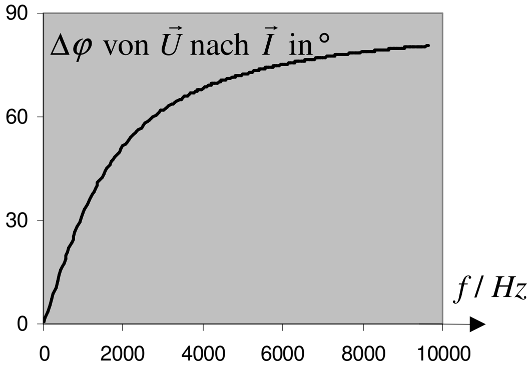
$$x(\omega) = \hat{I} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \hat{U}_R = \left|\vec{U}_R\right| = \frac{\hat{U} \cdot R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \hat{U}_L = \left|\vec{U}_L\right| = \frac{\omega L \cdot \hat{U}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Impedanz (Widerstand) $Z(\omega) = \dfrac{\left|\vec{U}\right|}{\left|\vec{I}\right|} = \dfrac{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} = \dfrac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{1} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$

$$\Delta\varphi(\omega) = \arctan \frac{U_x I_y - U_y I_x}{U_x I_x + U_y I_y} = \arctan \frac{R \cdot 0 - \omega L \cdot 1}{R \cdot 1 + \omega L \cdot 0} = \arctan \frac{\omega L}{R}.$$

Beispiel: $R = 100\,\Omega$; $L = 10mH$





Die Filterfunktion ist gut erkennbar

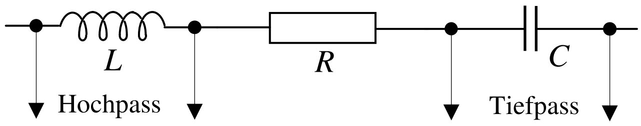
c) Die *acht* möglichen *LCR*-Schaltungen

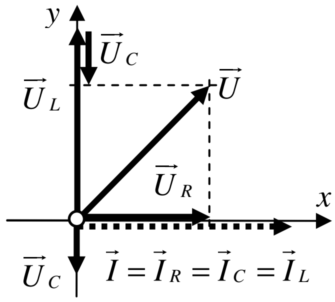
Verwendet man in einer Schaltung jedes der drei Bauteilen R , C und L *einmal*, so lassen sich durch Parallel- bzw. Reihenschaltung, *acht* verschiedene Anordnungen konstruieren. Die Zeigerplanauswertung ergibt alle Spannungen und Ströme, die *Impedanzkurve*, sowie die Gesamtphasenverschiebung $\Delta\varphi(\omega)$ von $\vec{U}$ *nach* $\vec{I}$.

Für Frequenzbereiche mit $\Delta\varphi(\omega) < 0$ wirkt die „black box“ nach *außen induktiv*, für $\Delta\varphi(\omega) > 0$ *kapazitiv*. Manchmal gibt es eine Frequenz $\omega_r \neq 0$, für welche $\Delta\varphi(\omega_r) = 0$ ist. Diese Frequenz heißt *Resonanzfrequenz*, für sie benimmt sich die „black box“ wie ein rein *ohmscher* Widerstand.

Schaltung 1) *R*, *C*, *L* in Reihe

Diese Schaltung dient als *Hoch- und Tiefpass* 2. *Stufe*





Bei der Reihenschaltung stimmen die drei Ströme überein. Deshalb wird ein erster Pfeil mit der noch unbekannter Länge $\hat{I} = \hat{I}_L = \hat{I}_R = \hat{I}_C = x$ auf die *x*-Achse gesetzt. Nun ergeben sich die drei Zeiger für die Spannungen nach dem obigen Kapitel. Durch Zeigeraddition erhält man die Gesamtspannung, deren Betrag den vorgegebenen Wert $\hat{U}$ besitzen muss. Aus dieser Forderung ergibt sich das unbekannte *x*. Hieraus erhalten wir alle weiteren Größen.

	Zeigerplan für Schaltung 1)			
	Strom		Spannung	Bemerkung
1	$\vec{I}_R = (x \mid 0)$	5	$\vec{U}_R = (R\,x \mid 0)$	$x = \hat{I} = ?$
2	$\vec{I}_C = (x \mid 0)$	6	$\vec{U}_C = \left(0 \,\middle|\, -\dfrac{x}{\omega C}\right)$	
3	$\vec{I}_L = (x \mid 0)$	7	$\vec{U}_L = (0 \mid \omega L x)$	
4	$\vec{I} = x(1 \mid 0)$	8	$\vec{U} = x \cdot \left(R \,\middle|\, \omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$	Aus $\lvert\vec{U}\rvert = \hat{U}$ folgt $x = \hat{I}$

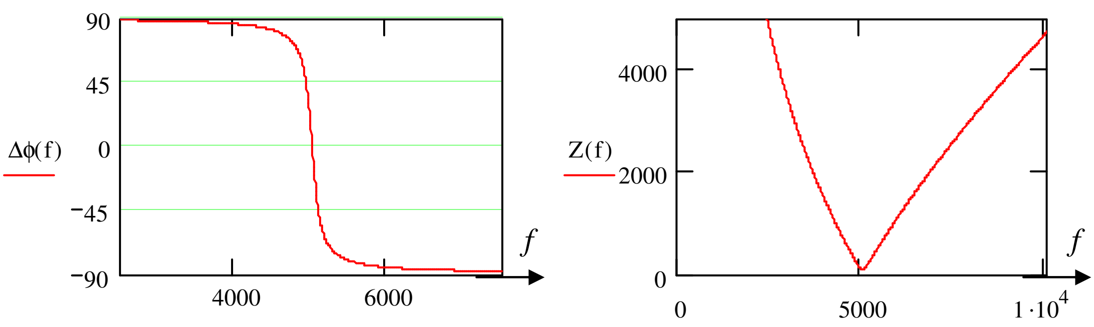
Ergebnis: $x = \hat{I} = \dfrac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$

$$Z(\omega) = \frac{|\vec{U}|}{|\vec{I}|} = \frac{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} = \frac{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}{1} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\Delta\varphi(\omega) = \arctan\frac{U_x I_y - U_y I_x}{U_x I_x + U_y I_y} = \arctan\frac{-\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{R} = \arctan\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC}$$

Aus $U_x I_y = U_y I_x$ folgt $\Delta\varphi(\omega) = 0$ und damit $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ (Resonanzfrequenz)

Die Berechnungen erfolgt mittels TR.

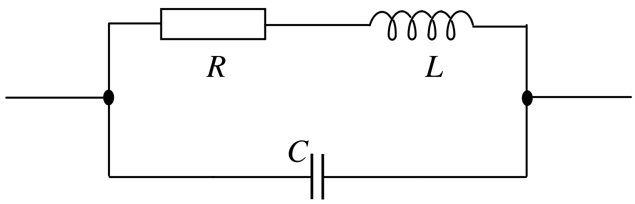


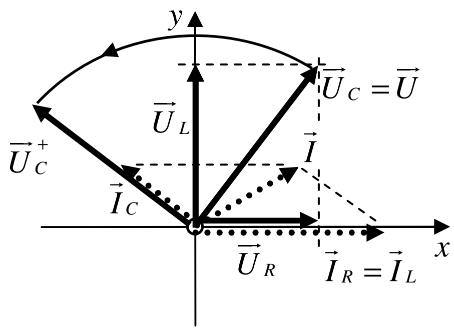
Schaltung mit $R = 100\,\Omega$; $C = 10\,nF$; $L = 0{,}1\,H$ ergibt $f_r = 5033\,Hz$

Weil die Impedanz (der Widerstand) für $\omega_r = 2\pi\, f_r$ *minimal* ist, fließt für diese Frequenz *maximaler* Strom. Die Schaltung „siebt" also *eine* Frequenz heraus und heißt daher *Siebkette*.
Die Reihenschaltung der drei Bauteile wird auch in der Empfangs- bzw. Sendeantenne für elektromagnetische Wellen als Frequenzwähler verwendet. Dabei wird ausgenutzt, dass der *maximale* *Strom* $I(f_r)$ an der *Spule* mittels einer Sekundärspule *induktiv* auskoppelbar ist.

Schaltung 2) R und L in Reihe, C parallel dazu.

Diese Schaltung dient als *Resonanzkreis*.





Hier stimmen zwei Ströme überein: $\vec{I}_R = \vec{I}_L$. Die beiden Zeiger werden deshalb mit unbekannter Länge x auf die x-Achse gesetzt. Daraus ergeben sich $\vec{U}_R$ und $\vec{U}_L$ nach den Regeln. Für den Kondensator und die Gesamtspannung folgt dann. $\vec{U} = \vec{U}_C = \vec{U}_R + \vec{U}_L$. Aus der Forderung $\left|\vec{U}\right| = \hat{U}$ ergibt sich x. Der Zeiger $\vec{U}_C$ muss nun um 90° nach vorne gedreht und mit ωC multipliziert werden, um $\vec{I}_C$ zu erhalten. Addition mit $\vec{I}_R$ liefert $\vec{I}$.

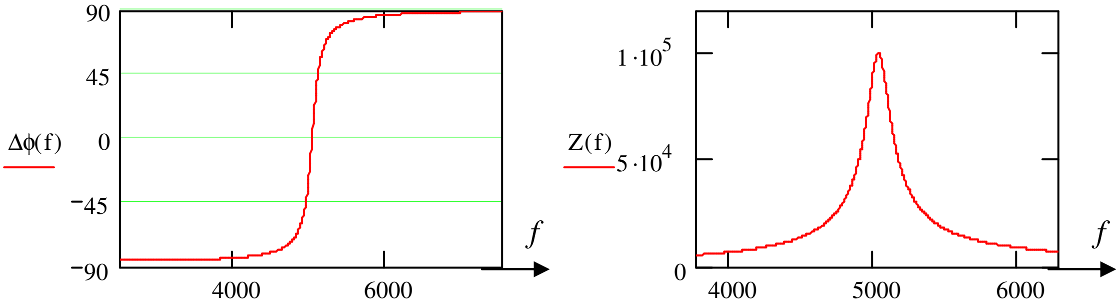
	Zeigerplan für Schaltung 2)			
	Strom		Spannung	Bemerkung
1	$\vec{I}_R = (x \mid 0)$	3	$\vec{U}_R = (R\,x \mid 0)$	x unbekannt
2	$\vec{I}_L = (x \mid 0)$	4	$\vec{U}_L = (0 \mid \omega L\,x)$	
		5	$\vec{U} = \vec{U}_C = x(R \mid \omega L)$	Hieraus folgt x
7	$\vec{I}_C = \omega C \cdot x(-\omega L \mid R)$	6	$\vec{U}_C^{\,+90°} = x(-\omega L \mid R)$	
8	$\vec{I} = x(1-\omega^2 LC \mid \omega CR)$			

Ergebnis: $x = \hat{I}_R = \dfrac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$; $Z(\omega) = \dfrac{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} = \dfrac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}}$

$$\Delta\varphi(\omega) = \arctan\frac{U_x I_y - U_y I_x}{U_x I_x + U_y I_y} = \arctan\frac{R\cdot\omega CR - \omega L\cdot(1-\omega^2 LC)}{R\cdot(1-\omega^2 LC) + \omega^2 RCL} = \arctan\frac{\omega(CR^2 - L + \omega^2 L^2 C)}{R}$$

Die Schaltung benimmt sich wie ein ohmscher Widerstand, wenn $\Delta\varphi(\omega)=0$ bzw.

$U_x I_y = U_y I_x$ gilt. Daraus folgt die Resonanzfrequenz $\omega_r = \sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{L^2}}$



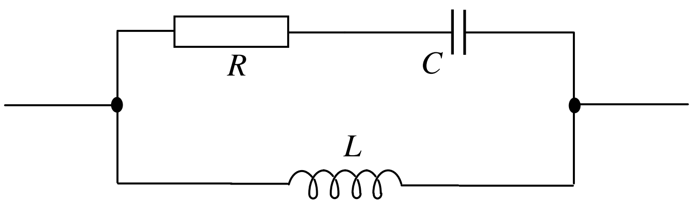
Schaltung mit $R=100\,\Omega$; $C=10\,nF$; $L=0{,}1\,H$ ergibt $f_r=5030\,Hz$; Strommessung an $1\,k\Omega$

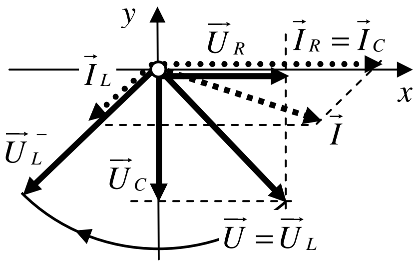
Weil die Impedanz (der Widerstand) bei etwa ω_r *maximal* ist, wird der Strom dieser Frequenz *minimal*. Er wird also „gesperrt". Die Schaltung heißt daher auch *Sperrkreis* .

Der Sperrkreis kann ebenfalls als Frequenz-Selektor in einer Empfangs- bzw. Sendeantenne verwendet werden. Nach dem Spannungsteilerprinzip ist der *Spannungsabfall* am Sperrkreis für den Frequenzwert ω_r *maximal*. Die Wechselspannung dieser Frequenz kann somit z.B. am *Kondensator C* abgegriffen werden.

Schaltung 3) R und C in Reihe, L parallel dazu.

Diese Schaltung dient auch als *Resonanzkreis*.





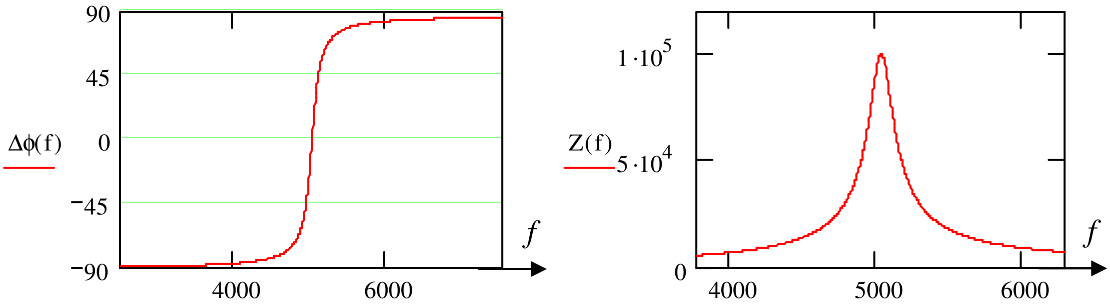
Hier stimmen $\vec{I}_R = \vec{I}_C$ überein. Beide Zeiger werden deshalb mit unbekannter Länge x auf die x-Achse gesetzt. Nun trägt man $\vec{U}_R$ und $\vec{U}_C$ an. Der Summenzeiger ist $\vec{U} = \vec{U}_L$, er muss die Länge $\hat{U}$ haben, wodurch sich x bestimmt. $\vec{U}_L$ wird nun um 90° zurück gedreht. Division durch ωL liefert $\vec{I}_L$. Addition von $\vec{I}_R$ ergibt den Gesamtstrom $\vec{I}$.

	Zeigerplan für Schaltung 3)			
	Strom		Spannung	Bemerkung
1	$\vec{I}_R = (x \mid 0)$	3	$\vec{U}_R = (R\,x \mid 0)$	$x=?$
2	$\vec{I}_C = (x \mid 0)$	4	$\vec{U}_C = \left(0 \,\middle|\, -\dfrac{x}{\omega C}\right)$	
		5	$\vec{U} = \vec{U}_L = x\left(R \,\middle|\, -\dfrac{1}{\omega C}\right)$	$\rightarrow x$
7	$\vec{I}_L = \dfrac{x}{\omega L}\left(-\dfrac{1}{\omega C} \,\middle|\, -R\right)$	6	$\vec{U}_L^{\,-90°} = x\left(-\dfrac{1}{\omega C} \,\middle|\, -R\right)$	
8	$\vec{I} = x\left(1-\dfrac{1}{\omega^2 LC} \,\middle|\, -\dfrac{R}{\omega L}\right)$			

Ergebnisse: $x = \hat{I}_R = \dfrac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}}$; $Z(\omega) = \dfrac{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} = \dfrac{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{1}{\omega^2 LC}\right)^2 + \left(\dfrac{R}{\omega L}\right)^2}}$

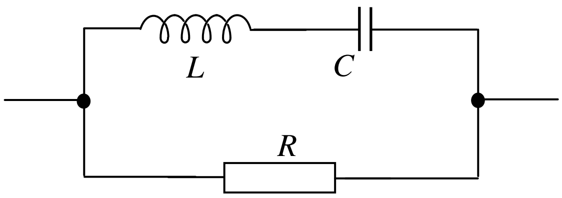
$$\Delta\varphi(\omega) = \arctan \frac{U_x I_y - U_y I_x}{U_x I_x + U_y I_y} = \arctan \frac{R \cdot \left(-\dfrac{R}{\omega L}\right) - \left(-\dfrac{1}{\omega C}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{\omega^2 LC}\right)}{R \cdot \left(1 - \dfrac{1}{\omega^2 LC}\right) + \left(-\dfrac{1}{\omega C}\right) \cdot \left(-\dfrac{R}{\omega L}\right)}$$

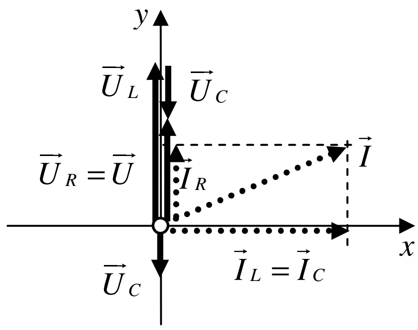
Die Resonanzfrequenz ergibt sich aus der Forderung $\Delta\varphi(\omega) = 0$ bzw. $U_x I_y = U_y I_x$. Dies liefert $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC - R^2 C^2}}$. Die Schaltung arbeitet ebenfalls als *Sperrkreis*



Schaltung mit $R = 100\,\Omega;\ C = 10\,nF;\ L = 0{,}1\,H$ ergibt $f_r = 5035\,Hz$

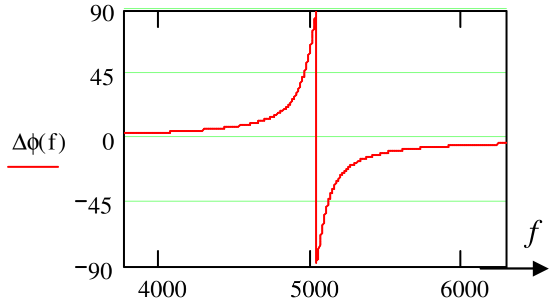
<u>**Schaltung 4)** L , C in Reihe, R parallel dazu</u>

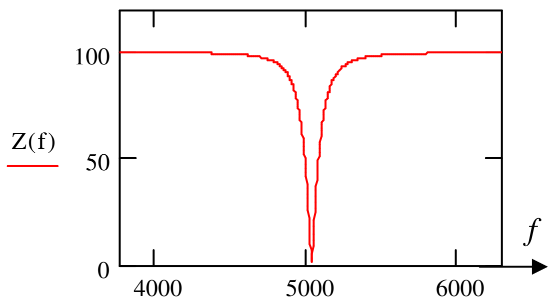




Der Strom $\vec{I}_L = \vec{I}_C$ durch L und C wird mit x angesetzt.
Daraus ergeben sich $\vec{U}_C$, $\vec{U}_L$, $\vec{U}_C + \vec{U}_L = \vec{U} = \vec{U}_R$ sowie x,
daraus wiederum $\vec{I}_R$ und damit $\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_C$.

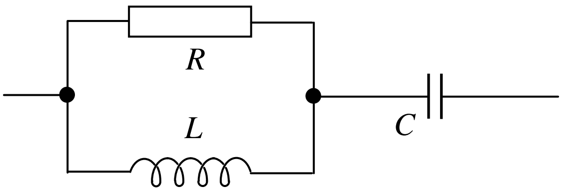
	Zeigerplan für Schaltung 4)			
	Strom		Spannung	Bemerkung
1	$\vec{I}_L = (x \mid 0)$	3	$\vec{U}_L = x(0 \mid \omega L)$	$x = ?$
2	$\vec{I}_C = (x \mid 0)$	4	$\vec{U}_C = \left(0 \,\middle|\, -\dfrac{x}{\omega C}\right)$	
6	$\vec{I}_R = \dfrac{x}{R} \cdot \left(0 \,\middle|\, \omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$	5	$\vec{U} = \vec{U}_R = x\left(0 \,\middle|\, \omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$	$\rightarrow x$
7	$\vec{I} = x\left(1 \,\middle|\, \dfrac{\omega L}{R} - \dfrac{1}{\omega CR}\right)$			

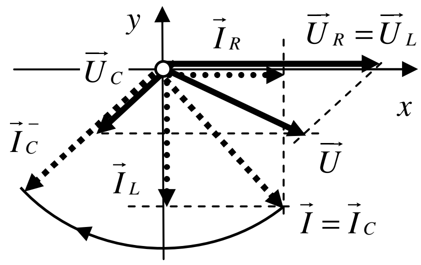




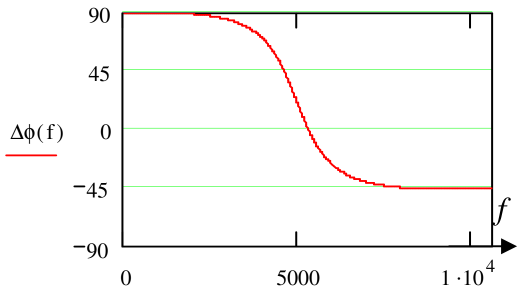
$R = 100\,\Omega;\ C = 10\,nF;\ L = 0{,}1\,H$ ergibt $f_r = 5027\,Hz$ Bei f_r ein Phasensprung von - π

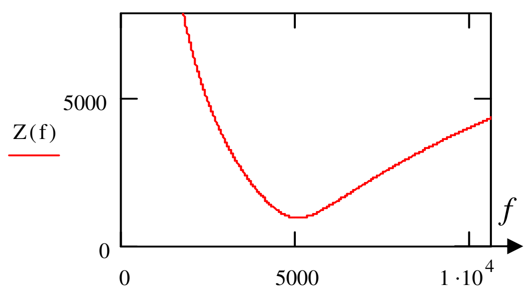
Schaltung 5) R, L parallel, C in Reihe dazu





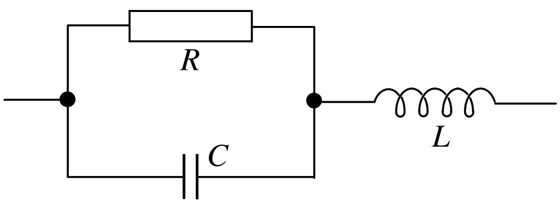
	Zeigerplan für Schaltung 5)			
	Strom		Spannung	Bem.
3	$\vec{I}_R = x\left(1/R \mid 0\right)$	1	$\vec{U}_R = \left(x \mid 0\right)$	$x = ?$
4	$\vec{I}_L = x\left(0 \,\middle|\, -\dfrac{1}{\omega L}\right)$	2	$\vec{U}_L = \left(x \mid 0\right)$	
5	$\vec{I} = \vec{I}_C = x\left(\dfrac{1}{R} \,\middle|\, -\dfrac{1}{\omega L}\right)$			
6	$\vec{I}_C^{\,-90°} = x\left(-\dfrac{1}{\omega L} \,\middle|\, -\dfrac{1}{R}\right)$	7	$\vec{U}_C = x \cdot \dfrac{1}{\omega C} \cdot \left(-\dfrac{1}{\omega L} \,\middle|\, -\dfrac{1}{R}\right)$	
		8	$\vec{U} = x\left(1 - \dfrac{1}{\omega^2 LC} \,\middle|\, -\dfrac{1}{\omega RC}\right)$	$\rightarrow x$

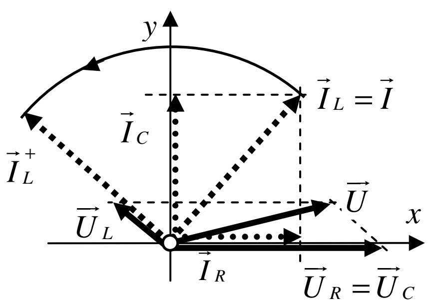




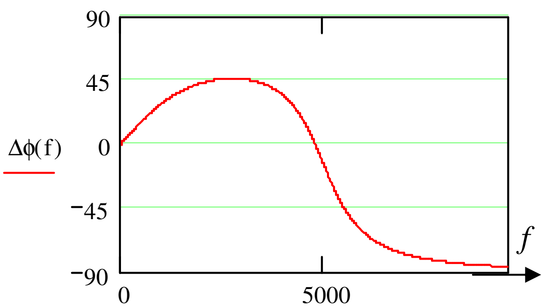
$R = 10\,k\Omega;\ C = 10\,nF;\ L = 0{,}1\,H$ ergibt $f_r = 5305\,Hz$

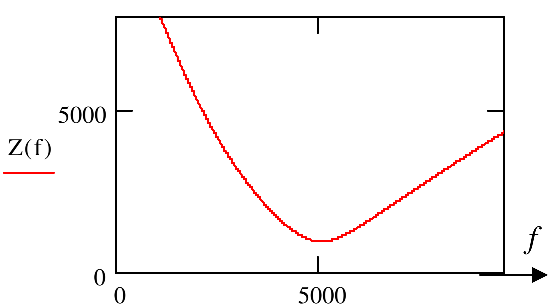
Schaltung 6) R, C parallel, L in Reihe dazu





	Zeigerplan für Schaltung 6)			
	Strom		Spannung	Bemerkung
3	$\vec I_R = x(\ 1/R\ \vert 0)$	1	$\vec U_R = (\ x \vert 0)$	$x = ?$
4	$\vec I_C = x(0 \vert \omega C\ )$	2	$\vec U_C = (\ x \vert 0)$	
5	$\vec I = \vec I_L = x(\ 1/R \vert \omega C)$			
6	$\vec I_L^{\,+90°} = x(-\omega C \vert\ 1/R\ )$	7	$\vec U_L = x\omega L(-\omega C \vert\ 1/R\ )$	
		8	$\vec U = x\left(1-\omega^2 CL \,\middle\vert\, \dfrac{\omega L}{R}\right)$	$\to x$

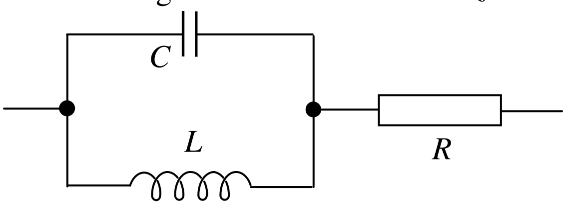


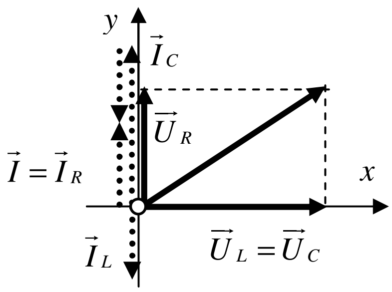


$R = 10k\,\Omega;\ C = 10nF;\ L = 0{,}1H$ ergibt $f_r = 4775\,Hz$

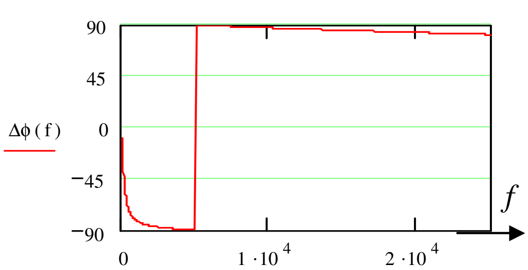
Schaltung 7) C, L parallel, R in Reihe dazu

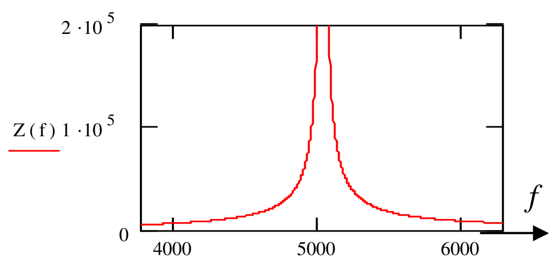
Diese Schaltung dient auch als *Resonanzkreis*.





	Zeigerplan für Schaltung 7)			
	Strom	1	Spannung	Bemerkung
3	$\vec I_C = x(\ 0\ \vert \omega C)$	2	$\vec U_C = (\ x \vert 0)$	$x = ?$
4	$\vec I_L = x\left(0 \,\middle\vert\, -\dfrac{1}{\omega L}\right)$	6	$\vec U_L = (\ x \vert 0)$	
5	$\vec I = \vec I_R = x \cdot \left(0 \,\middle\vert\, \omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)$	7	$\vec U_R = R \cdot x\left(0 \,\middle\vert\, \omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)$	
		8	$\vec U = x\left(1 \,\middle\vert\, \omega CR - \dfrac{R}{\omega L}\right)$	$\to x$

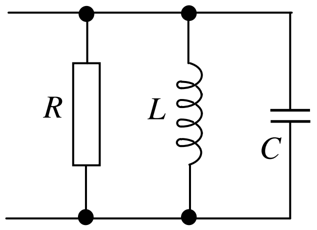


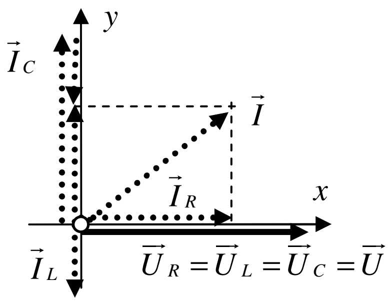


$R = 100\,\Omega;\ C = 10nF;\ L = 0{,}1H$ ergibt $f_r = 5033\,Hz$

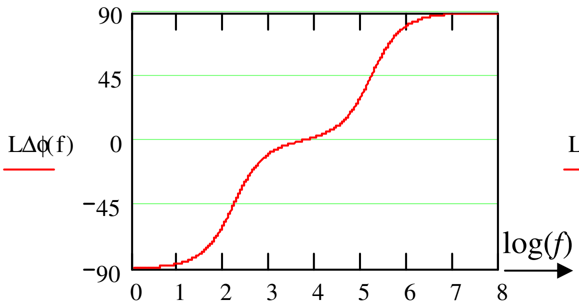
Bei ω_r erfolgt ein Phasensprung von $+\pi$

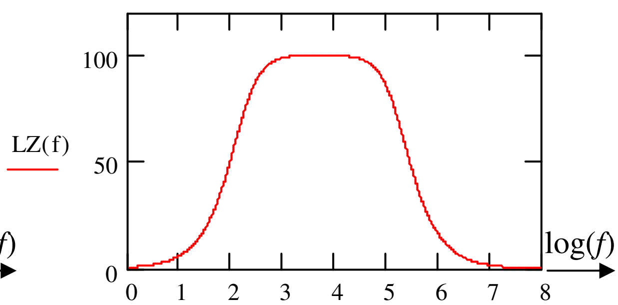
Schaltung 8) R , C , L parallel





	Zeigerplan für Schaltung 8)			
	Strom		Spannung	Bemerkung
4	$\vec{I}_R = x(\ 1/R\ \|0)$	1	$\vec{U} = \vec{U}_R = (\ x\|0)$	$x = \hat{U}$
5	$\vec{I}_L = x\left(0\middle\| -\dfrac{1}{\omega L}\right)$	2	$\vec{U} = \vec{U}_L = (\ x\|0)$	
6	$\vec{I}_C = x(\ 0\ \|\omega C)$	3	$\vec{U} = \vec{U}_C = (\ x\|0)$	
7	$\vec{I} = x \cdot \left(\dfrac{1}{R}\middle\| \omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)$			$\rightarrow x$

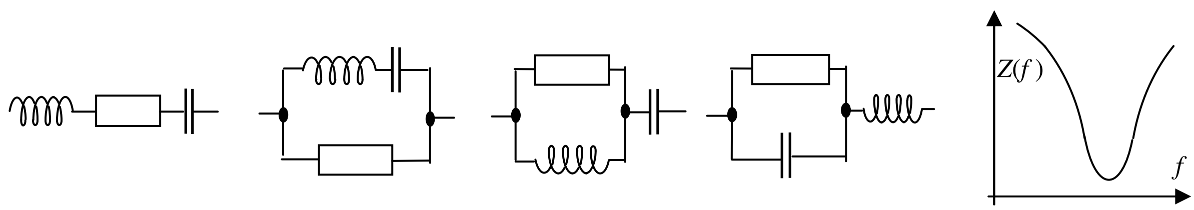




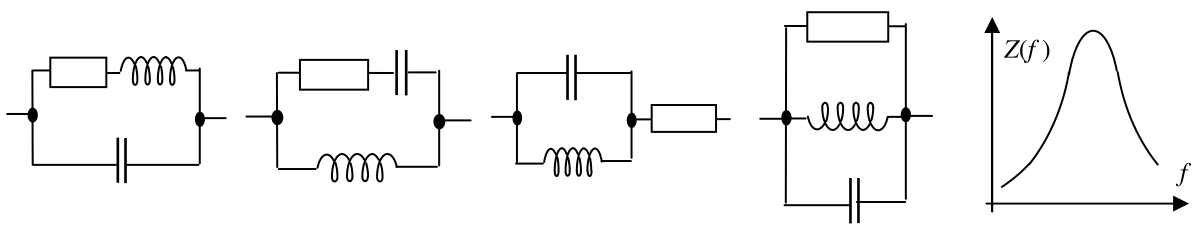
$R = 100\Omega$; $C = 10nF$; $L = 0{,}1H$ ergibt $f_r = 5033\,Hz$

Überblick des Impedanzverhaltens

Schaltungen, bei denen L und C in Reihe liegen liefern eine Impedanzdelle.



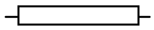
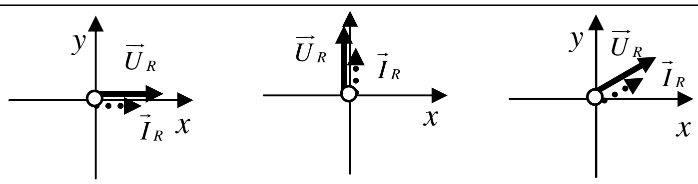
Schaltungen, bei denen L und C parallel liegen liefern einen Impedanzpik.

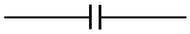
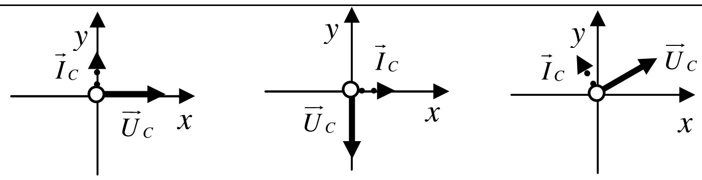


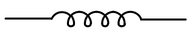
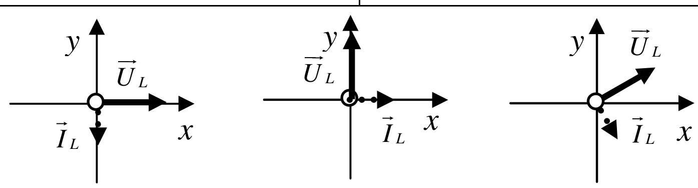
d) Kochrezept Wechselstrom

Kreisfrequenz, Frequenz $\omega = 2\pi f$

Ursache = Spannung , Wirkung = Strom

Widerstand			
Widerstandswert R	Definitionsgleichung: $R = U / I$	Maßeinheit: $Ohm = \ \Omega = V \cdot A^{-1}$	
Berechnung von R aus den geometrischen Daten:		$R = \rho \cdot l\, A^{-1}$; ρ = spezifischer Widerstand	
Symbol			
Zeigerdiagramme			
Phasendifferenz	Der Strom ist mit der Spannung in Phase	$\Delta\varphi = \varphi_I - \varphi_U = 0$	
Amplituden = Zeigerlänge = Vektorbetrag:		$\hat{I} = R^{-1} \cdot \hat{U}$	$\hat{U} = R \cdot \hat{I}$
Wechselstromwiderstand des Widerstandes $= R$ (frequenz*un*abhängig)			

Kondensator			
Kapazität C	Definitionsgleichung $C = Q / U$	Maßeinheit: $Farad = F = As / V$	
Berechnung von C aus den geometrischen Daten:		$C = \varepsilon_0\, \varepsilon_r\, A / d$; $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\, As / Vm$	
Symbol			
Zeigerdiagramme			
Phasendifferenz	Der Strom eilt der Spannung um 90° voraus	$\Delta\varphi = \varphi_I - \varphi_U = +90°$	
Amplituden = Zeigerlänge = Vektorbetrag:		$\hat{I} = \omega C \cdot \hat{U}$	$\hat{U} = (\omega C)^{-1} \cdot \hat{I}$
Wechselstromwiderstand des Kondensators $= 1 / \omega C$ (frequenzabhängig)			

Spule			
Induktivität L	Definitionsgleichung $U_{ind} = -L \cdot \dot{I}$	Maßeinheit: $Henry = H = Vs / A$	
Berechnung von L aus den geometrischen Daten:		$L = \mu_0 \mu_r\, A n^2 / l$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Vs / Am = 1{,}257 \cdot 10^{-6}\, Vs / Am$	
Symbol			
Zeigerdiagramme			
Phasendifferenz	Der Strom hinkt der Spannung um 90° nach	$\Delta\varphi = \varphi_I - \varphi_U = -90°$	
Amplituden = Zeigerlänge = Vektorbetrag:		$\hat{I} = (\omega L)^{-1} \cdot \hat{U}$	$\hat{U} = \omega L \cdot \hat{I}$
Wechselstromwiderstand der Spule $= \omega L$ (frequenzabhängig)			

Zusammengesetzte Schaltung	
Phasenverschiebung ist frequenzabhängig Für Bereiche mit $\Delta\varphi > 0$ hat die Schaltung *kapazitiven* Charakter Für Bereiche mit $\Delta\varphi < 0$ hat die Schaltung *induktiven* Charakter Für den Frequenzwert mit $\Delta\varphi = 0$ hat die Schaltung *ohmschen* Charakter $\Rightarrow$ Resonanzfrequenz f_r	
Allgemeine Formel für Phasenverschiebung:	$\Delta\varphi(\omega) = \arctan \dfrac{U_x I_y - U_y I_x}{U_x I_x + U_y I_y}$
Die Resonanzfrequenz ergibt sich allgemeine durch die Forderung	$U_x I_y = U_y I_x$
Der frequenzabhängige Wechselstromwiderstand der Gesamtschaltung heißt *Impedanz* $Z(\omega)$	
Allgemeine Formel für Impedanz	$Z(\omega) = \dfrac{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}$

Vorgehensweise	
Durch *Kirchhoffsche Gesetze* (mindestens) zwei übereinstimmende *Einzelzeiger* suchen und diese mit unbestimmter Länge x auf die *x*-Achse setzen.	
Alle übrigen Zeiger ansetzen und das vollständige *Zeigerdiagramm* konstruieren	Konstruktionsbeschreibung
Zeigerplan entsprechend dem Zeigerdiagramm aufstellen.	
Drehung um $+90°$	$+90°: \overrightarrow{P} = (x \mid y) \rightarrow \overrightarrow{P'} = (-y \mid x)$
Drehung um $-90°$	$-90°: \overrightarrow{P} = (x \mid y) \rightarrow \overrightarrow{P'} = (y \mid -x)$
x- Bestimmung	Die Spannungsamplitude ist direkt als $\hat{U}$ oder indirekt durch $\hat{U} = U_{eff} \cdot \sqrt{2}$ gegeben. Durch die Forderung $\hat{U} = \left\| \vec{U} \right\| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$ erhält man x.
Alle übrigen Zeiger ergeben sich dadurch, wie auch die Funktionsgleichungen für $\Delta\varphi(\omega)$ und $Z(\omega)$	