

Roter Faden Physik

<https://roter-faden-physik.de/>

Gravitation und Planetenbewegung

mit Aufgaben und Lösungen

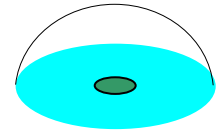
*von*

*Dr. Ortwin Fromm*

Evangelische Schule Frohnau, Berlin

## A) Geschichte der Weltbilder.

a) Die Vorstellung der Erde als *flache Scheibe* vertraten schriftlose Völker, sowie die *mesopotamischen* Hochkulturen. Schöpfungsmythen zufolge sei die Erde eine winzige Insel inmitten des Urozeans. Dieses Urbild findet sich auch im Alten Testament der hebräischen Bibel wieder.



b) Die *griechische* Antike fand schnell Argumente für die Kugelgestalt der Erde.

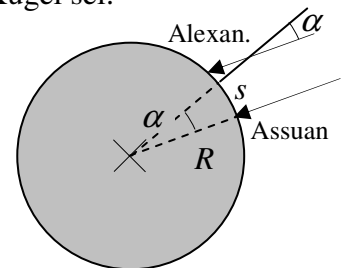
*Argumente der Beobachtung:*

- 1) Bei Mondfinsternis erscheint der Schatten der Erde auf dem Mond, wie auf einer „Projektionsleinwand“, stets rund.
- 2) Im Süden der Nordhalbkugel stehen die Sterne der Ekliptik höher am Himmel als im N.
- 3) Ein ankommendes Schiff zeigt als erstes die Mastspitze.

*Philosophisch-religiöses Argument:*

Wie die Hebräer, so entwickelten auch die *Griechen* einen *Monotheismus*. Dieser war jedoch *philosophischer* Art und entsprang der Vorstellung der *Einheit* von göttlichem Wesen und Natur. Christentum und Islam bereicherten ihr Gottesbild z.T. mit diesen Gedanken der Antike. Im philosophischen Monotheismus gilt das Ideal von Kreis, Kugel und *Mittelpunkt*. Daraus leiteten die Griechen *gedanklich* ab, dass alle Körper zum Mittelpunkt des All-Einen und damit zum Mittelpunkt der Erde streben müssten, weshalb die Erde eine Kugel sei.

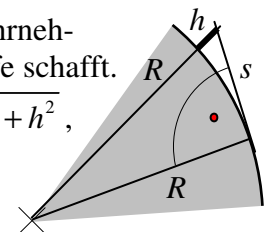
Messung des Erdumfanges durch *Eratosthenes* im 3. Jahrhundert v. Chr.: Assuan in Ägypten liegt etwa auf dem nördlichen Wendekreis, sodass die Sonne zur Sommersonnenwende dort senkrecht am Himmel steht und ein senkrecht aufgestellter Stab *keinen* Schatten wirft. In Alexandria,  $s = 800 \text{ km}$  nördlicher, wirft ein senkrechter Stab zur selben Zeit jedoch einen Schatten unter ca.  $7^\circ$ .



Daraus ergibt sich:  $\frac{2\pi \cdot R}{360^\circ} = \frac{800 \text{ km}}{7^\circ}$  bzw.  $R \approx 6548 \text{ km}$ , - ein hervorragender Wert.

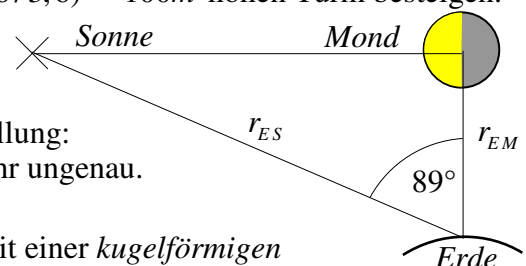
Die folgende Horizontberechnung zeigte den Griechen, wie *klein* der Wahrnehmungsbereich des Menschen ist, so dass erst Denken und Rechnen Abhilfe schafft.

Die Entfernung  $s$  zum Horizont folgt aus  $(R+h)^2 = s^2 + R^2$  zu  $s = \sqrt{2Rh + h^2}$ , bzw.  $s \approx \sqrt{2Rh}$ . Mit  $R \approx 6400 \text{ km}$  erhält man die Weite  $s$  in  $\text{km}$  daher nach der Faustformel  $s = 3,6 \cdot \sqrt{h}$ , wobei  $h$  in Metern einzusetzen ist.



*Beispiele:* 1) Für die Augenhöhe  $h = 1,69 \text{ m}$  ist der Horizont wegen  $\sqrt{1,69} = 1,3$  nur  $s = 3,6 \cdot 1,3 \approx 4,7 \text{ km}$  entfernt. 2) Um die Küstenlinie einer Insel in  $36 \text{ km}$  Entfernung über den Horizont schimmern zu sehen, muss ich einen  $h = (36/3,6)^2 = 100 \text{ m}$  hohen Turm besteigen.

Die Entfernung Erde/Sonne ermittelten die alten Griechen aus der Entfernung Erde/Mond und dem Winkel zwischen Mond und Sonne zur Halbmondstellung:  $r_{ES} = r_{EM} / \cos 89^\circ \approx 57 \cdot r_{EM}$ . Der Wert war jedoch sehr ungenau.

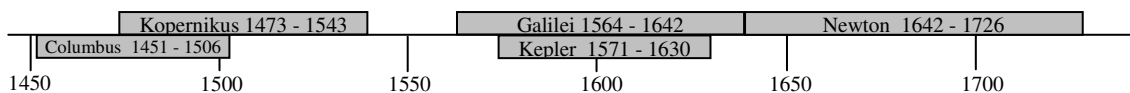


c) Die *Antike* vertrat also ein geozentrisches Weltbild mit einer *kugelförmigen* Erde im Zentrum. Mond, Sonne und Planeten seien an unsichtbare *Kristallsphären* geheftet, welche die Erde konzentrisch umgäben und die Himmelskörper bei ihren Drehungen „mitnahmen“. Rätselhaft war nur die zeitweilige Rückwärtsbewegung, welche für die äußeren Planeten, Mars, Jupiter und Saturn am *Nachthimmel* sichtbar ist. Zur Zeit der *Spätantike* löste *Ptolemäus* dieses Problem, indem er jedem Planeten eine weitere rotierende Kristallsphäre, den Epizyklus, zuordnete, dessen Mittelpunkt jeweils auf der Hauptsphäre umläuft, siehe Übungsaufgabe 3). Diese „Konstruktion“ beschrieb die Bewegung der Planeten gut, doch wusste niemand, welche titanischen Kräfte die Himmelsphären halten und drehen.

- d) Es ist ein anhaltender Propagandaerfolg der *Aufklärungszeit* gegen das „finstere Mittelalter“, dass bis heute viele meinen, dieses hätte wieder an die „flache Erde“ geglaubt (Wikipedia). *Alle* gebildeten Kreise, wie auch die Katholische Kirche, gingen von der Kugelgestalt der Erde aus. Thomas von Aquin (1225–1274), der einflussreichste Kirchenlehrer des Mittelalters, vertrat die kugelförmige Erdgestalt und der Kaiser trug den Reichsapfel und keine Scheibe wie die Pharaonen. Man hatte lediglich Zweifel an der Bewohnbarkeit der „Erdunterseite“ und auch der Stand der Schiffstechnik ließ eine Erdumseglung als hoffnungslos erscheinen. Erst die Sperrung der Seewege nach Indien sowie eine fehlerhafte Neuberechnung des Erdumfanges ermunterten *Columbus* das Abenteuer mit unzureichenden Schiffen zu wagen.
- e) In der *frühen Neuzeit* führte *Kopernikus* das *heliocentrische* Weltbild ein und erklärte die Rückwärtsbewegung zum schlichten „Sehproblem“. Auch wenn die Erde dadurch ihre Mittelpunktstellung einbüßte, so entfielen doch die komplizierten Epizyklen und die Planeten waren wieder an rein *konzentrische* Sphären geheftet. Weil die „Harmonie“ des Himmels dadurch sogar gesteigert war, wurde dieses Weltbild kirchenseits zumindest als Hypothese akzeptiert.

Doch nun folgten drei Schritte, die das alte Weltbild auflösten und ein neues schufen.

- 1) Mit großer Gewissenhaftigkeit wertete *Johannes Kepler* Messergebnisse von *Tycho Brahe* aus und korrigierte die Kreisbahnen zu minimal *exzentrischen Ellipsen*. Diese, aus heutiger Sicht geringfügige Modifikation, brachte aber das gerade durch Kopernikus wiederhergestellte Ideal von Kugel, Kreis und *Mittelpunkt* zum völligen Einsturz, denn die Sonne steht in einem der *Brennpunkte*, - die Mitte ist leer. Die *leere Mitte* erschütterte aber die antike Vorstellung, welche „Mitte“ und „Gott“ stets zusammen dachte. - Dies ging nun nicht mehr.
- 2) *Galileo Galilei* betrachtete den Mond durch das gerade erfundene Fernglas und sah, wie dieser *Himmelskörper* mit Bergen, Tälern und „Maren“ der Erde ähnelt. Im Umkehrschluss nahm er dann den Blick der ersten Mondfahrer Armstrong und Aldrin gedanklich vorweg und erkannte, dass die Erde auch „nur“ ein Himmelskörper ist, ein Körper *ohne Einmaligkeit*. Das Band zwischen dem „einmaligen Gott“ und der vormals „einmaligen Erde“ war zerrissen. Die Kirche widersprach mit dem Argument, dass Beobachtungen *keine* Aussagekraft hätten. So *sei* der Abendmahlswein faktisch Jesu *Blut*, auch wenn dies niemand *sieht*.
- 3) Nach dem geozentrischen Weltbild ist das *Primäre* der Sturz von Himmel und Planeten zum Erdmittelpunkt, welcher durch die göttlichen Himmelsphären verhindert wird. Das *Trägheitsgesetz* von Galilei dreht den Gedanken vollständig um: Das Primäre ist die tangentielle Flucht des Mondes (bzw. der Planeten) aus der Kreisbahn und die Gravitation der Erde (bzw. der Sonne) hält ihn (bzw. sie) durch ihre Zentripetalwirkung davon ab.
- 4) Zusammenfassung: Die *Kopernikanische Wende* löste eine Revolution des Denkens aus: Götter verschwinden, die Natur reguliert sich selbst: Gottesbeweise und Glaubenszwang lassen sich nicht aus der Natur begründen.



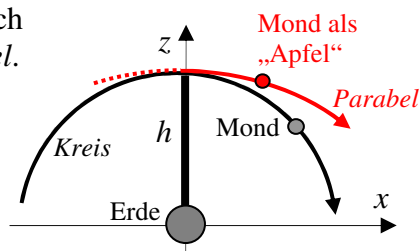
## B) Newtons Mondrechnung und das Gravitationsgesetz

Der Legende nach sah *Newton* einen vom Wind *waagrecht* abgerissenen Apfel zu Boden fliegen. Er wusste, dass der Apfel längs einer *Parabel* fliegt und dass diese Flugbahn am *Scheitelpunkt* so rund ist wie ein Kreis. Auf einem Kreis fliegt aber auch der Mond. Newtons Geistesblitz: *Der Mond fliegt wie der Apfel*.

In „Mechanik, Fall- und Wurfbewegung“ ergab sich für die

$$\text{Bahnkurve des waagerechten Wurfs } z(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_x^2} x^2 + h.$$

Mit  $v_x$  = seitliche Abwurfgeschwindigkeit,  $h$  = Abwurfhöhe.



Die Krümmung erhält man durch zweimaliges Ableiten:  $z'' = -g / v_x^2$ , also  $\text{Kr}_{\text{Parabel}} = \underline{\underline{-g / v_x^2}}$ .

Die Krümmung der Kreisbahn beträgt  $Kr_{Kreis} = -1/r$ , denn Krümmung und Radius sind *anti-proportional* zueinander. Für den Apfel gilt  $r = R_E$ , denn der Apfel „umkreist“ den Erdmittelpunkt auf dem Radius  $R_E = 6400\text{ km}$ . - Für den Mond gilt  $r = R_{EM} = 384\,000\text{ km}$ .

Newton betrachtete den Mond als „Apfel“. Also setze er die Kreisrümmung  $Kr_{Kreis} = -1/R_{EM}$  des Mondes mit der Parabelkrümmung  $Kr_{Parabel} = -g/v_x^2$  des Apfels gleich:  $-1/R_{EM} = -g/v_x^2$ . Die „seitliche Geschwindigkeit“  $v_x$  des Mondes *muss genau* seine Umlaufgeschwindigkeit  $v$  sein. Aus  $1/R_{EM} = g/v^2$  ergibt sich aber  $v = \sqrt{g \cdot R_{EM}} = \sqrt{9,81\text{ m/s}^2 \cdot 3,84 \cdot 10^8\text{ m}} = \underline{61\,376\text{ m/s}}$ .

Das ist aber total *falsch*, denn die seitliche Geschwindigkeit ist bekannt: Sie ergibt sich einfach aus „ein Bahnumfang geteilt durch einen Monat“.  $v = U/T$ .  $U = 2\pi \cdot R_{EM} = 2\pi \cdot 3,84 \cdot 10^8\text{ m}$  und  $T = 1\text{ Monat} = 27,3 \cdot 24 \cdot 3600\text{ s}$  ergibt  $v = \underline{1023\text{ m/s}}$ . Newtons „Apfelmond“ ist also

$\frac{61\,376}{1023} = 60$  mal *zu schnell*. Woher kommt der riesige Fehler „60“? Newton hatte alle Zahlen

im Kopf und so stieß er auf eine andere „60“: Der Mond „fliegt“ nämlich 60 mal so „hoch“ über dem Erdmittelpunkt wie der Apfel, dessen „Höhe“ ein Erdradius  $R_E = 6400\text{ km}$  beträgt.

Tatsächlich ergibt  $384\,000/6400 = 60$ . In der Formel  $v = \sqrt{g \cdot R_{EM}}$  für die Geschwindigkeit  $v$  lässt sich nur der Ortsfaktor  $g$  „manipulieren“. Um  $v$  auf ein  $1/60$ -stel zu drücken, muss der Ortsfaktor aber auf  $1/3600$ -stel schrumpfen, denn er steht unter der Wurzel. Newtons Schlussfolgerung: Der Ortsfaktor ist nicht konstant, er nimmt quadratisch mit dem Abstand  $r$  vom Erdmittelpunkt ab. Als Funktion nennt man den Ortsfaktor  $G$  und es gilt  $G(R_E) = g$ .

Der Ortsfaktor nimmt quadratisch ab. Damit  $G(R_E) = g$  stimmt, muss gelten:  $G(r) = g \cdot R_E^2 \cdot \frac{1}{r^2}$

Die Schwerkraft geht von der Masse aus. Je größer die Masse, desto größer der Schwerkraft. Daraus schloss Newton, dass der Proportionalitätsfaktor  $g \cdot R_E^2$  seinerseits zur Erdmasse  $M_E$  proportional sein muss. Der neue Proportionalitätsfaktor heißt  $\gamma =$  Gravitationskonstante. Mit  $g \cdot R_E^2 = \gamma M_E$  folgt  $G(r) = \gamma M_E \cdot \frac{1}{r^2}$ . Ersetzt man nun in der Formel  $F_G = m \cdot g$  den Ortsfaktor  $g$  durch das verallgemeinerte  $G$ , so folgt  $F_G = m \cdot \gamma M_E \frac{1}{r^2}$ . In nächsten Schritt werden  $m$  und

$M_E$  durch  $M_1$  und  $M_2$  ersetzt. Ergebnis: Das *Newtonsche Kraftgesetz*  $F_G = \gamma \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2}$ .

#### Anmerkungen zum Newtonschen Kraftgesetz der Gravitation:

- 1) Die Gravitationskraft von  $M_1$  auf  $M_2$  ist anziehend. Abstoßende Gravitation gibt es nicht.
- 2)  $F_G$  ist symmetrisch bzgl.  $M_1$  und  $M_2$ . Vertauscht man die Rollen von  $M_2$  und  $M_1$ , so zeigt sich, dass das 3. Newtonsche Axiom „Actio = Reactio“ erfüllt ist.

#### **Zusammenfassung Kapitel B)**

- 1) *Quadratisches Abstandsgesetz*: Weder Mond, noch Apfel folgen bei ihren Bewegungen dem Trägheitsgesetz. Nach Newton beruht die Abweichung von der gleichförmigen gradlinigen Bewegung beide male auf der Schwerkraft der Erde, ausgedrückt durch den Ortsfaktor. Damit die beobachtete Umlaufzeit des Mondes richtig heraus kommt, muss der Wert des Ortsfaktors, der am Erdboden  $g$  beträgt, *quadratisch* mit der Entfernung vom Erdmittelpunkt abnehmen.
- 2) *Kraftgesetz der Gravitation*: Das Kraftgesetz erfüllt auch 3. Newtonsche Axiom: Rollentausch zeigt: Der Apfel zieht die Erde genauso stark an, wie diese ihn. Die gegenseitige Anziehungskraft ist proportional zum *Produkt* der Massen. Sind weitere Massen im Spiel, so überlagern sich die paarweisen Anziehungen additiv. Eine „Triowirkung“ usw. ist nicht bekannt.

### C) Das Gravitationsfeld

Newton wusste nicht, *wie* die Anziehungskraft die Distanzen überbrückt. Er sah sich genötigt eine unmittelbare (unendlich schnelle) *Fernwirkung* anzunehmen. Heute weiß man, dass Änderungen der Gravitation auch „nur“ mit *Lichtgeschwindigkeit* übertragen werden. Kürzlich wurden sogar Gravitationswellen entdeckt, welche Gravitationsänderungen über kosmische Entfernungen durch den Weltraum übertragen. Die Messung wurde mit dem Nobelpreis geehrt.

Nach heutiger Vorstellung ist der Zwischenraum von Gravitation erzeugender Masse  $M_1$  und der Gravitation erfahrender Masse  $M_2$  mit einer vermittelnden Substanz ausgefüllt, nämlich dem *Gravitationsfeld*. Wie kommt man darauf, dass die Gravitation, dass etwas zwischen den beiden Massen existiert?

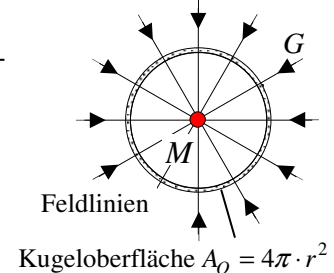
Gemäß der Kraftformel  $F_G = \gamma M_1 \cdot M_2 / r^2$  ist  $F_G$  gleich null, wenn  $M_2$  null ist. Aber ist die Gravitation tatsächlich „weg“, wenn keine Gravitation erfahrenden Masse  $M_2$  vorhanden ist? Zur Beantwortung setzen wir  $M_2$  nicht schlagartig null, sondern lassen es langsam kleiner werden. Dann wird auch  $F_G$  kleiner. Doch das Verhältnis von  $F_G$  zu  $M_2$  bleibt stets auf dem Wert  $F_G / M_2 = \gamma M_1 / r^2$  stehen. Das Verhältnis ist überhaupt nicht von  $M_2$  abhängig. Es behält seinen Wert selbst dann, wenn  $M_2$  im *Limes* gegen null geschickt wird. Das heißt: Auch ohne die Gravitation erfahrenden Masse  $M_2$  ist der ganze Raum durch den Term  $\gamma M_1 / r^2$  „erfüllt“, welcher *nur* von der felderzeugenden Masse  $M_1$  abhängt. Den Term  $\gamma M / r^2$  nennt man

*Feldstärke* des *Gravitationsfeldes* von  $M$ . Der Buchstabe dafür ist  $G$ . Allg. gilt  $G = \frac{\gamma M}{r^2}$ .

Ein Vergleich zeigt, dass der von Newton ermittelte Ortsfaktor  $G$  nichts anderes war, als die Feldstärke  $G$ , welche die Masse der Erde auf „Mondhöhe“ erzeugt. Auch ist der berühmte Ortsfaktor  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  nichts anderes, als die Gravitationsfeldstärke  $G$  in Bodennähe.

Newton wurde er gefragt, warum es exakt  $r^2$  und nicht etwa  $r^{2,001}$  heißt. Er konnte das nicht beantworten, denn die Erklärung folgt erst aus der Feldvorstellung. Das Feld wird nämlich von *Feldlinien* durchlaufen. Die Feldstärke entspricht der Liniendichte.

Eine kugel- oder punktförmige Masse erzeugt radial, bis ins Unendliche laufende Feldlinien. Da Gravitationsfeldlinien *nur* von *Massen* erzeugt werden und einmal vorhandene *nicht wieder verschwinden* können, müssen sie von ihren Erzeugungspunkt aus immer größere Kugeloberfläche durchstoßen. Da die Kugeloberfläche aber gemäß  $A_O = 4\pi \cdot r^2$  wächst, nimmt die Feldstärke gemäß  $1/r^2$  ab.



#### Zusammenfassung Kapitel C)

- 1) *Existenz*: Das Feld erfüllt den ganzen Raum. Eine Limesbetrachtung zeigt, dass das Feld auch ohne Nachweis existiert. Die Feldstärke ist proportional zur Größe der felderzeugenden Masse.
- 2) *Ortsfaktor*: Der Ortsfaktor  $g$  in Bodennähe, bzw.  $a$  in größerer Entfernung **ist** die Feldstärke.
- 3) *Abstandsgesetz*: Die quadratische Abnahme der Feldstärke einer Punktmasse beruht nicht auf einer Abschwächung, sondern nur auf der Anforderung, größere Kugeloberflächen zu durchdringen.

### D) Die Gravitationswaage und die Gravitationskonstante $\gamma$

Der Faktor  $g \cdot R_E^2$  in B) beruht allein auf Daten der Erde, weshalb er proportional zur Erdmasse  $M_E$  sein muss. Es gilt  $g \cdot R_E^2 = \gamma M_E$ , mit  $\gamma$  als Propfaktor.  $\gamma$  heißt *Gravitationskonstante*.

Wie groß ist  $\gamma$ ? Eine erste Rechnung ging von  $\gamma = g \cdot R_E^2 / M_E$  aus. Aber wie schwer ist die Erde? Das zugängliche *Oberflächengesteine* hat etwas die Dichte  $\rho \approx 3000 \text{ kg/m}^3$ .

Dadurch ergab sich  $\gamma = \frac{g \cdot R_E^2}{M_E} = \frac{g \cdot R_E^2}{V \cdot \rho} = \frac{3 \cdot g \cdot R_E^2}{4 \cdot \pi R_E^3 \cdot \rho} = \frac{3 \cdot g}{4 \cdot \pi R_E \cdot \rho} \approx 1,2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ .

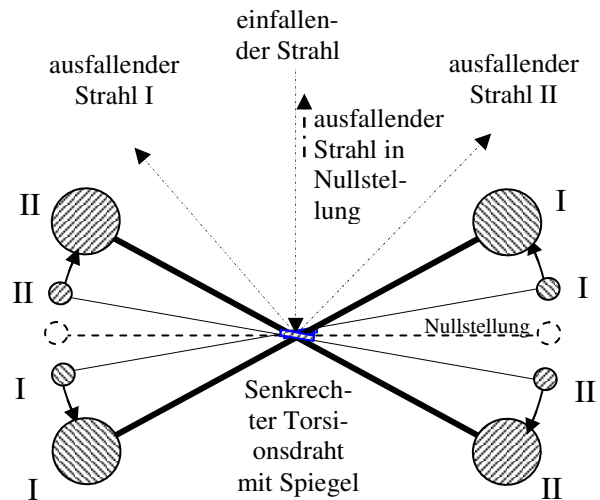
Dieser Wert ist *sehr ungenau*, denn die Beschaffenheit des Erdinneren war unbekannt. Es gelang dem Engländer *Cavendish* 1797 mit seinem bedeutenden *Drehwaage-Experiment* den  $\gamma$ -Wert präzise zu ermitteln ohne auf die Erdmasse zurückzugreifen. Durch Formelumstellung hat er im Gegenteil dann sogar „die Erde im Labor gewogen“. Eine waagrecht stehende Hantel mit zwei großen Bleimassen lässt sich um den Mittelpunkt in den Stellungen I und II arretieren. Eine weitere Hantel mit zwei kleinen Bleimassen ist an einem Torsionsdraht beweglich aufgehängt. Je nach Stellung der großen Kugeln verdrillt sich der Draht der kleinen Kugeln in eine gewisse Winkelstellung, denn die feststehenden großen Kugeln ziehen die beweglichen kleinen Kugeln in ihre Richtung. Über einen aufgeklebten Spiegel wird die Verdrillung per Lichtstrahl angezeigt. Die quantitative Auswertung liefert Cavendish den Wert der Gravitationskonstanten

$$\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{kg} \cdot \text{s}^2$$

Mit diesem genaueren Wert ergab sich aus der Formel  $g \cdot R_E^2 = \gamma \cdot M_E$  die Erdmasse

$$M_E = \frac{g \cdot R_E^2}{\gamma} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

So hat Cavendish „die Erde im Labor gewogen“.



#### Zusammenfassung Kapitel D)

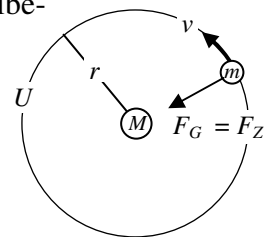
- 1) *Messung der Gravitationskonstante*: Ihr Wert wurde durch Anziehungskraft zweier Massen im Labor ermittelt. Die geringe Kraft erforderte die *erste Präzisionsmessung* der Physikgeschichte.
- 2) *Wert*: Der Wert von  $\gamma$  ist winzig. Zwei 1kg Massen in 1m Abstand ziehen sich nur mit 67 pN an.
- 3) *Erdmasse*: Die Messung von  $\gamma$  im Labor ermöglichte die exakte Berechnung der Erdmasse.

#### E) Bewegung eines kleinen Körpers $m$ auf einer Kreisbahn um einen Zentralkörper $M$ .

Um eine Masse  $m$  von der *gleichförmig gradlinigen* Bewegung in eine Kreisbewegung zu zwingen, ist somit eine *Kraft* erforderlich, welche die Zentripetalbedingung  $F_Z = m v^2 / r$  erfüllt. Die Gravitation einer Punktmasse leistet dies.

Diese Überlegungen werden hier angewendet auf ...

- a) die Bewegung des Mondes  $m$  um die Erde  $M$ ,
- b) die Bewegung eines künstlichen Satelliten  $m$  um die Erde  $M$ ,
- c) die Bewegung der Planeten  $m$  um die Sonne  $M$ .



- 1) In die Bahnberechnung gehen die drei Größen (Bahnparameter)  $r$ ,  $v$  und  $T$  ein.

Gegeben ist jeweils *eine* der drei Größen, die anderen *beiden* lassen sich dann berechnen. Das gelingt, weil es *zwei* Beziehungen (Formeln) gibt, welche die drei Größen verbinden.

- I) Die Gravitationskraft  $F_G = \gamma \frac{mM}{r^2}$  fungiert als Zentripetalkraft  $F_Z = \frac{m v^2}{r}$ .

Aus  $m v^2 / r = \gamma m M / r^2$  folgt dann  $v^2 r = \gamma M$  Formel (I)

- II) Für die Bahngeschwindigkeit gilt  $v = U / T = 2\pi r / T \Rightarrow v = 2\pi r / T$  Formel (II)

Beispielaufgaben mit:  $R_E = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ ,  $\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{kg} \cdot \text{s}^2$ ,  $M_E = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

- a) Gegeben.:  $r$     Gesucht:  $v$  und  $T$ .

Lösung:  $v^2 r = \gamma M$  nach  $v^2$  umstellen:  $v^2 = \gamma M / r$ . Dann  $\sqrt{\dots}$  ziehen.

Nun  $r$  und  $v$  in  $v = 2\pi r / T$  einsetzen und nach  $T$  umstellen.

Beispiel: Erdsatellit in  $h = 200 \text{ km}$  Höhe. Erg.:  $r = 6570 \text{ km}$ ;  $v = 7787 \text{ m/s}$ ;  $T = 5300 \text{ s}$

b) Gegeben:  $v$  Gesucht:  $r$  und  $T$ .

Lösung:  $v^2 r = \gamma M$  nach  $r$  umstellen:  $r = \gamma M / v^2$

Nun  $r$  und  $v$  in  $v = 2\pi r / T$  einsetzen und nach  $T$  umstellen.

Beispiel: Erdsatellit mit  $v = 7000 \text{ m/s}$ . Erg.:  $r = 8130 \text{ km}$ ;  $h = 1771 \text{ km}$ ;  $T = 7298 \text{ s}$

c) Gegeben:  $T$  Gesucht:  $v$  und  $r$ .

Lösung:  $r = \frac{\gamma M}{v^2}$  in  $v = \frac{2\pi r}{T}$  einsetzen ergibt  $v^3 = \frac{2\pi \cdot \gamma M}{T}$ . Dann  $\sqrt[3]{\dots}$  ziehen.

Nun  $T$  und  $v$  in  $v = 2\pi r / T$  einsetzen und nach  $r$  umstellen.

Beispiel: Erdsatellit mit  $T = 5500 \text{ s}$ . Erg.:  $v = 7692 \text{ m/s}$ ;  $r = 6733 \text{ km}$ ;  $h = 363,2 \text{ km}$

d) Anmerkung: Eliminieren von  $v$  aus Formel (I)  $v^2 r = \gamma M$  und Formel (II)  $v = 2\pi r / T$  :

Quadrieren von (II) ergibt  $v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$ . Einsetzen in (I):  $\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \cdot r = \gamma M$  ergibt

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \cdot r = \gamma M. \quad \text{Umstellen: } \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} \cdot r^3}.$$

Hat man zwei Planeten  $P_1$  und  $P_2$ , welche *dasselbe* Zentralgestirn der Masse  $M$  auf un-

terschiedlichen Bahnen umlaufen, so gilt  $T_1^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} \cdot r_1^3$  und  $T_2^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} \cdot r_2^3$ .

Division dieser Gleichungen ergibt  $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$  bzw.  $\boxed{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3}$ . 3. Kepler-Gesetz

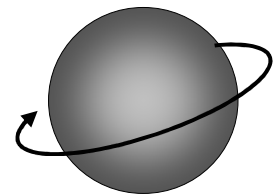
Das 3. Kepler-Gesetz besagt für zwei Planeten, welche *dasselbe* Zentralgestirn auf *Kreisbahnen* umlaufen, dass das Quadrat des Verhältnisses der Umlaufzeiten gleich der 3. Potenz des Verhältnisses der Bahnradien ist.

Diese Gesetzmäßigkeit hat Kepler durch Beobachtung für *elliptische Bahnen* gefunden. Für elliptische Bahnen sind die Radien dann durch die großen Halbachsen zu ersetzen.

## 2) Kreisförmige Satellitenbahnen

Satelliten umlaufen *stets* den *Erdmittelpunkt* in Höhen *oberhalb* der Atmosphäre. Je kleiner der Radius  $r$ , desto kleiner die Umlaufzeit.

Ohne Berge und Atmosphäre könnte ein Satellit die Erdkugel in ca.



null Meter Höhe umkreisen. Die Umlaufzeit betrüge dann  $T = \sqrt{4\pi^2 R_E^3 / \gamma M_E} =$

$5067 \text{ s} \approx 84 \text{ min}$ . Alle 84 Minuten flöge der Satellit vorüber.

Ein Körper, welcher die Erde in einem fiktiven Bohrloch durchschwingt, benötigt *interessanterweise* die gleiche Zeit als Schwingungsdauer. Niedrigen Parkbahnen, die auch für die Kartographie genutzt werden, verlaufen in ca.  $200 \text{ km}$  Höhe. Die Umlaufzeiten beträgt dann weniger als 90 Minuten. Die ISS hat ca.  $350 \text{ km}$  Höhe und läuft in 91 Minuten um. Kommunikationssatelliten laufen in einigen tausend Kilometern Höhe um. Satelliten sieht man nur früh morgens und am frühen Abend. Warum?

### **Zusammenfassung Kapitel E)**

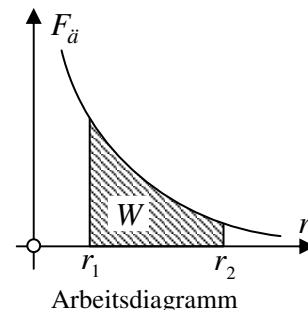
- 1) *Kreisbahn:* Die Kreisbahn wird zwar gleichförmig, aber nicht gradlinig durchlaufen. Deshalb ist eine Kraft erforderlich, die Zentripetalkraft. Die Gravitation eine „Punktmasse“ erfüllt die Bedingung.
- 2) *Parameter:* Es gibt die *drei* Bahnparameter: Radius, Umlaufgeschwindigkeit und Umlaufdauer.
- 3) *Beziehungen:* Zwischen den drei Bahnparametern bestehen *zwei* Beziehungen, sodass nur *ein* Parameter bekannt sein muss. Die anderen beiden lassen sich dann berechnen.

## F) Arbeit und Energie einer Masse $m$ im Gravitationsfeld der Masse $M$ .

### 1) Hubarbeit $W$

Im „Roten Faden Physik, Mechanik“ haben wir gelernt, dass zum Heben einer Masse  $m$  um die Hubhöhe  $h$  (in Erdbodennähe) die Arbeit  $W = g m h$  zu verrichten ist.

Jetzt soll die Masse  $m$  aber nicht nur um wenige Meter, sondern um viele hundert oder gar tausend Kilometer *senkrecht* empor geschossen bzw. gehoben werden. Damit gerät  $m$  aus dem Bereich des (nahezu) konstanten Ortsfaktors  $g$ , der in Bodennähe gilt, heraus. D.h., die Hubarbeit ist gegen den *variablen* Ortsfaktor  $a(r) = \gamma M / r^2$  zu verrichten. Im Abstand  $r$  vom Erdmittelpunkt ist daher die äußere Kraft  $F_a = \gamma m M / r^2$  aufzubringen, um die Masse  $m$  kräftefrei zu bewegen. Die Hubarbeit gewinnen wir wieder als Flächeninhalt des zugehörigen Arbeitsdiagrammes. Im 2. KHJ lernt man, dass ein Flächeninhalt durch *Integration* berechnet wird. Die Integralrechnung ist die Umkehrung der Differentialrechnung.



Wir zeigen als Integrieren zunächst am Beispiel der Funktion  $f(x) = 1/x^2 = x^{-2}$  :

Zum Integrieren von  $f(x)$  muss eine sogenannte Stammfunktion  $F(x)$  gefunden werden, sodass  $F'(x) = f(x)$  gilt. Da Ableiten den Exponenten um 1 erniedrigt, muss  $F(x)$  die Form  $F(x) = k \cdot x^{-1}$  mit noch unbekanntem  $k$ . Ableiten des Ansatzes ergibt  $F'(x) = -1 \cdot k \cdot x^{-2}$ . Damit muss  $k = -1$  gelten und das Ergebnis der Integration lautet  $F(x) = -x^{-1} = -1/x$ . Der Flächeninhalt unter der Kurve  $f(x) = 1/x^2$  zwischen den Werten  $x_1$  und  $x_2$  ergibt sich dann durch die Formel  $A = F(x_2) - F(x_1) = -1/x_2 - (-1/x_1) = 1/x_1 - 1/x_2$ .

Übertragen auf das Arbeitsdiagramm heißt das:

$$W_{r_1 \rightarrow r_2} = \gamma m M \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Beispiel 1) Um eine Rakete der Masse  $m = 1000 \text{ kg}$  von der Erdoberfläche mit  $r = R_E = 6370 \text{ km}$  auf die Höhe  $h = 200 \text{ km}$ , also auf den Mittelpunktsabstand

$R = 6570 \text{ km}$  zu heben, muss man  $W = 1,9 \cdot 10^9 \text{ J} = 1,9 \text{ GJ}$  Arbeit verrichten.

Beispiel 2) Um die Masse  $m = 1000 \text{ kg}$  von der Erdoberfläche mit  $r = R_E = 6370000 \text{ m}$  auf die Höhe  $h = 1 \text{ m}$ , also auf den Mittelpunktsabstand  $R = 6370001 \text{ m}$  zu heben, muss man  $W = 9,81 \text{ kJ}$  Arbeit verrichten. Das ergibt sich auch mit  $W = g m h$ .

### 2) Potentielle Energie $W_{\text{pot}}$ einer Masse $m$ im Gravitationsfeld der Masse $M$ .

Allgemein gilt: Verrichtete Arbeit wird zu potentieller Energie. Aber wo fängt die Verrichtung an? Wenn ein Buch auf dem Erdboden liegt, so würde man ihm die potentielle Energie  $W_{\text{pot}} = 0$  zuschreiben, weil es ja noch nicht angehoben wurde. Aber vielleicht wurde es am Vortag aus dem Kellermagazin empor getragen. Kurzum, eine allgemeine Formel für die potentielle Energie eines Körpers erfordert eine *Bezugshöhe*, für welche  $W_{\text{pot}} = 0$  gelten soll. Weder der Erdboden noch das Kellerniveau ist sinnvoll, beide sind *relativ*. Gibt es überhaupt etwas *Absolutes*? Für ein homogenes Feld, welches sich mit konstantem Ortsfaktor  $g$  über den gesamten Raum erstreckt, gibt es das *nicht*, wohl aber für ein Schwerfeld, dessen Ortsfaktor gemäß  $a(r) = \gamma M / r^2$  mit zunehmendem  $r$  abnimmt und im Unendlichen verschwindet. Diesen *Nullwert im Unendlichen* nutzt man zur Festlegung des Bezugsniveaus. Um z.B. die potentielle Energie der Masse  $m$  auf dem Erdboden zu ermitteln, überführen wir  $m$  gedanklich von  $r_1 = \infty$  nach  $r_2 = R_E$ . Die zu „verrichtende“ Arbeit ist



dann *negativ*, es gilt  $W_{\infty \rightarrow R_E} = \gamma m M_E \cdot \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{R_E} \right) = \gamma m M_E \cdot \left( 0 - \frac{1}{R_E} \right) = -\frac{\gamma m M_E}{R_E}$ .

Für  $m = 1 \text{ kg}$  gilt dann auf dem Erdboden  $W_{pot,0} = -\gamma m M_E / R_E = -62539733,124 \text{ J}$  und in *ein* Meter Höhe  $W_{pot,1} = -\gamma m M_E / (R_E + 1\text{m}) = -62539723,306 \text{ J}$ .

Die Differenz  $W_{pot,1} - W_{pot,0} = 9,81 \text{ J}$  ist dann wieder die übliche Hubarbeit.

Allgemein haben wir somit die Generalformel für die potentielle Energie einer Masse  $m$  im Gravitationsfeld der punktförmigen Masse  $M$ : 
$$W_{pot} = -\frac{\gamma m M}{r}$$
.

Bemerkung zum „Minuszeichen“: Solange  $m$  eine endliche Entfernung  $r$  zu  $M$  hat, kann  $m$  die Zentralmasse  $M$  umkreisen und ist insofern an  $M$  *gebunden*.  $m$  sitzt also im „Keller“ von  $M$ . Das Minuszeichen seiner potentiellen Energie ist somit anschaulich verständlich

### 3) Kinetische Energie einer Masse $m$ auf einer Kreisbahn um die Masse $M$ .

Für die kinetische Energie gilt allgemein  $W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m v^2$ .

Dadurch, dass die Gravitationskraft  $F_G = \gamma m M / r^2$  auf der Kreisbahn jedoch als Zentripetalkraft  $F_z = m v^2 / r$  fungiert, also  $v^2 = \gamma M / r$  gilt, sind  $v$  und  $r$  nicht mehr unabhängig.

Setzt man  $v^2 = \gamma M / r$  in  $W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m v^2$  ein, so erhält man für die kinetische Energie eine Formel, die *scheinbar* gar nicht mehr von  $v$  abhängt: 
$$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma m M}{r}$$
.

→ Sowohl  $W_{pot}$ , als auch  $W_{kin}$  enthalten den Term  $\gamma m M / r$ . Damit gilt 
$$W_{pot} = -2 \cdot W_{kin}$$

### 4) Gesamtenergie einer Masse $m$ auf einer Kreisbahn um die Masse $M$ .

Für die Gesamtenergie gilt bekanntlich  $W_{Ges} = W_{kin} + W_{pot}$ .

Wegen  $W_{pot} = -2 \cdot W_{kin}$  folgt 
$$W_{Ges} = -W_{pot}$$
. Also 
$$W_{Ges} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma m M}{r}$$
.

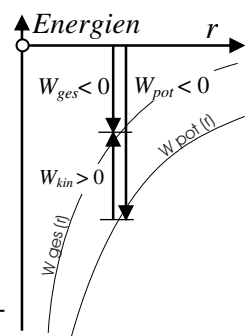
Bemerkung: Die Beziehungen zwischen  $W_{pot}$ ,  $W_{kin}$  und  $W_{Ges}$  heißen „**Virialsatz**“

### 5) Anmerkungen:

a)  $W_{kin}$  ist zwar *positiv* (muss es wegen  $v^2$  sein). Da aber  $W_{pot}$  exakt doppelt so groß und negativ ist, ist auch die Gesamtenergie  $W_{Ges}$  auf allen Kreisbahnen *negativ*.

b) Auf der Kreisbahn sind  $W_{kin}$  und  $W_{Ges}$  dem Betrage nach gleich groß. Aber während  $W_{kin} > 0$  gilt, ist  $W_{Ges} < 0$ .

c) Kann  $W_{Ges}$  überhaupt positiv sein? Antwort: **Ja**.  $W_{Ges}$  ist dann positiv, wenn die Masse  $m$  bereits aus dem Unendlichen mit einer Geschwindigkeit herbei fliegt. Für manche Kometen ist das der Fall. Doch diese Kometen durchlaufen eine *Hyperbelbahn* und keine *Kreisbahn*.



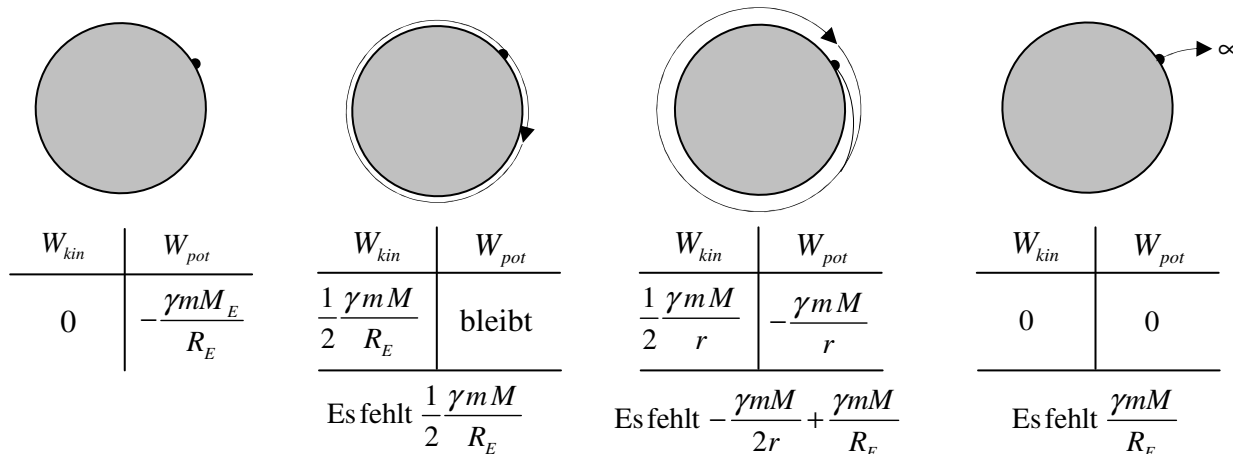
### **Zusammenfassung Kapitel F)**

- 1) *Hubarbeit*: Die Hubarbeit gewinnt man aus dem *Arbeitsdiagramm* mit *abnehmende* Ortsfaktor.
- 2) *Potentielle Energie*: *Bezugsniveau*. Für die Bewegung im Feld einer Punktmasse bietet sich auf natürliche Weise der Abstand  $r = \infty$  als *Bezugsniveau* an. Damit wird  $W_{pot}$  für *alle*  $r < \infty$  *negativ*.
- 3) *Kinetische Energie*:  $W_{kin} > 0$ . Auf der Kreisbahn wird  $v$  durch  $r$  ersetzt.  $W_{kin}$  ist deshalb *immer* halb so groß wie  $W_{pot}$ , allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen.
- 4) *Gesamtenergie*: Die *Bedingung* für  $W_{kin}$  überträgt sich auf  $W_{Ges}$ :  $W_{Ges} = -W_{kin}$ .
- 5) *Virialsatz*: Die Beziehungen zwischen  $W_{pot}$ ,  $W_{kin}$  und  $W_{Ges}$  auf der Kreisbahn heißen „*Virialsatz*“
- 6) *Vorzeichen von  $W_{Ges}$* : Für  $W_{Ges} < 0$  befindet sich  $m$  in einem an  $M$  *gebunden* Zustand und durchläuft eine *Kreis- oder Ellipsenbahn*.

### G) Startgeschwindigkeit von Raketen von der Erdoberfläche aus.

Eine senkrecht oder schräg abgeschossene Geschwehrgugel fällt auf die Erdoberfläche zurück. Eine militärische Rakete überfliegt einen gewissen Kreisbogen der Erdkugel und schlägt dann wieder auf. Die notwendige Startgeschwindigkeit für ein Orbit liefert die Energiebilanz:

Rakete auf Startrampe: $W_{kin} = 0$	<u>Minimales Orbit:</u> Flugbahn in „null“ Metern Höhe: $W_{kin} = \gamma m M / 2R_E$	<u>Orbit auf Radius <math>r</math>:</u> $W_{kin} = \gamma m M / 2r$ $W_{pot} = -\gamma m M / r$	<u>„Orbit“ mit <math>r = \infty</math>:</u> Zentripedalkraft = 0, Geschwindigkeit = 0, $W_{pot} = 0$
---	--	---	---



Die Startgeschwindigkeiten ergeben sich aus der Forderung $\frac{1}{2} \cdot m v_s^2 = \Delta W$	<u>1. kosmische Geschw.</u> $v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M_E}{R_E}}$	<u>Beliebiges Orbit</u> $v_s = \sqrt{2\gamma M_E \cdot \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{2r}\right)}$	<u>2. kosmische Geschw.</u> $v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma M_E}{R_E}}$
---	--	---	--

#### Spezialfälle: Kosmische Geschwindigkeiten

1) Erste kosmische Geschwindigkeit heißt diejenige *Startgeschwindigkeit*, welche die Rakete in das „Minimale Orbit“ in „gedachten“ *null* Metern Höhe schießt.

Für die *Erde* gilt  $v_1 \approx \underline{\underline{28080 \text{ km/h}}}$ .

Zweite kosmische Geschwindigkeit heißt diejenige Startgeschwindigkeit, welche die Rakete ins Unendliche befördert. Man sieht:  $v_2 = \sqrt{2} \cdot v_1$

Für die *Erde* gilt  $v_2 \approx \underline{\underline{40320 \text{ km/h}}}$

#### **Zusammenfassung Kapitel G)**

- Erdboden:** Steht eine Rakete am Erdboden, so ist  $W_{kin}$  gleich *null* und es gilt  $W_{pot} = -\gamma m M / r$ . Der Virialsatz zwischen  $W_{pot}$ ,  $W_{kin}$  und  $W_{Ges}$  gilt am Boden also *nicht*.
- Erste kosmische Geschwindigkeit:** Sie bringt die Rakete vom Boden auf die niedrigst mögliche Kreisbahn in „null“ Metern Höhe. Auf *jeder* Kreisbahn muss der Virialsatz zwischen  $W_{pot}$ ,  $W_{kin}$  und  $W_{Ges}$  gelten. Daher muss  $W_{kin}$  vom Wert null auf den Wert  $W_{kin} = -\frac{1}{2} W_{pot}$  gebracht werden. Diese Energie wird durch einen Startschuss mit der 1. kosmischen Geschwindigkeit aufgebracht.
- Zweite kosmische Geschwindigkeit:** Sie bringt die Rakete vom Boden in das Unendliche. Dazu muss genau doppelt soviel Startenergie bereitgestellt werden, wie für das minimale Orbit erforderlich ist.  $v_2$  muss daher um den Faktor  $\sqrt{2}$  größer sein als  $v_1$ .
- Änderung des Bahnradius:** Die Differenz der jeweiligen Gesamtenergien liefert die erforderlich Abschussgeschwindigkeit zur Bahnänderung.

**H) Geostationäre Bahn der Erde** Forderung: Umlaufzeit  $T = 24 \cdot 3600 \text{ s} = 86400 \text{ s}$ .

Aus  $r_{geost}^3 = \frac{\gamma M_E T^2}{4\pi^2}$  folgt  $r_{geost} = \sqrt[3]{\frac{\gamma M_E T^2}{4\pi^2}} = \underline{\underline{42,242 \cdot 10^6 \text{ m}}} = \underline{\underline{42\,242 \text{ km}}}$

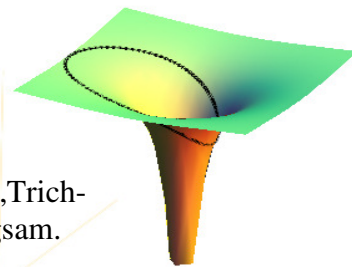
Flughöhe über der Erde  $h_{geost} = r_{geost} - R_E = \underline{\underline{35,871 \cdot 10^6 \text{ m}}} = \underline{\underline{35\,871 \text{ km}}}$ .

Die „echte“ geostationäre Bahn umläuft die Erde über dem Äquator. Relativ zu einem Ort auf dem Äquator steht der Satellit dann tatsächlich still. Umkreist der Satellit den Erdmittelpunkt in „geostationärer Höhe“ auf einer nichtäquatorialen Kreisbahn, so schwingt er, relativ zur rotierenden Erde, in Form einer „Acht“ zwischen Nord und Süd hin und her.

**I) Bewegung eines Planeten oder Satelliten auf einer elliptischen Bahn.**

1) Die elliptische Bahn im Potentialtopf.

Wirft man eine Münze schräg in einen Geldspendetrichter, so würde sie bei Reibungsfreiheit von oben gesehen auf einer Ellipsenbahn umlaufen. Das Trichterloch umläuft sie mit hoher Geschwindigkeit. Am Rand wird sie langsam. Bei der Planetenbahn ist es entsprechend: Die Sonne steht in einem der Ellipsenbrennpunkte, im „Trichterloch“. Den *Aphel* durchläuft der Planet schnell, den *Perihel* langsam.

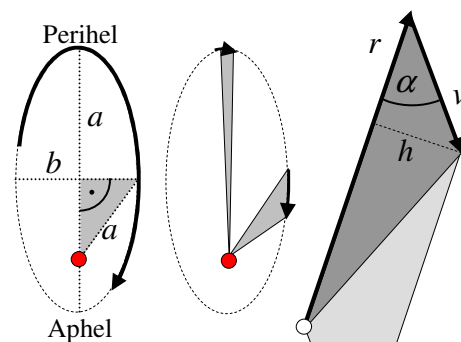


2) Die Gesetze der Ellipsenbahn.

Kepler deutete die hoch präzisen Planetendaten von *Tycho Brahe* und fand das ..

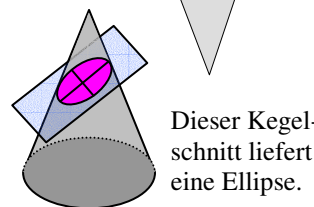
1. **Kepler-Gesetz:** Jeder Planet durchläuft eine (minimale) Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. **Kepler-Gesetz:** Der von der Sonne zum Planeten gezogene *Leitstrahl* überstreicht in einer raumfesten Ebene in gleichen Zeiten gleich große Flächen. (Keplersche Flächensatz)
3. **Kepler-Gesetz:** Für zwei Planeten gilt  $(T_1/T_2)^2 = (a_1/a_2)^3$ .  $a_{1,2}$  sind dabei die großen Halbachsen der Ellipsen.(siehe Abb.).

Der *Flächensatz* beruht auf dem *Drehimpulserhaltungssatz*, den Kepler noch nicht kannte. Der Betrag des Drehimpulses ist das Produkt von Hebelarm  $r$ , Geschwindigkeit  $v$  und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels:  $L = r \cdot v \cdot \sin \alpha$ . Da aber  $v \cdot \sin \alpha = h$  die Höhe des nebenstehenden Parallelogramms mit der Grundseite  $r$  ist, entspricht der Flächeninhalt des Parallelogramms dem Betrag des Drehimpulses  $L$ .



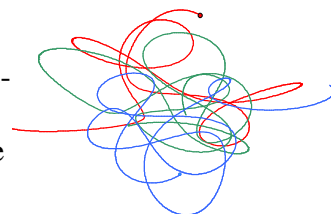
3) Überblick: Mögliche Bahnen, Kegelschnitte

Die möglichen Bahnen einer Masse  $m$  um die Masse  $M$  sind 1) der Kreis 2) die Ellipse 3) die ins Unendlich gehende Parabel und 4) die asymptotisch aus dem Unendlich kommende und dorthin gehende Hyperbel. Interessanterweise erhält man alle diese Kurven durch geeignetes Schneiden eines Kegels mit einer Ebene. Im ersten und zweiten Fall ist die Gesamtenergie der Masse  $m$  negativ. Im dritten Fall ist sie null. Im vierten Fall ist sie positiv.



**J) Sonnensystem, Dreikörperproblem**

Bewegen sich z.B. *drei* Körper unter dem Einfluss der Gravitation, so entstehen im Allgemeinen chaotische Verhältnisse. Kleinste Bahnänderungen bewirken mitunter völlig unterschiedliche zukünftige Verläufe (Schmetterlingseffekt). In unserem Sonnensystem beinhaltet die Sonne jedoch 99,86% der Gesamtmasse. Daher sind die Planeten vergleichs-



weise „masselos“ und beeinflussen sich kaum. Sobald die Umlaufzeiten jedoch in einem niedrigen rationalen Verhältnis stehen, kommt es zu *Resonanzen*. Bahnstörungen schaukeln sich auf und Planeten stürzen in die Sonne oder werden aus dem System geschleudert. Auf diese Weise wurde in der Frühgeschichte des Sonnensystems mächtig „aufgeräumt“.

Interessant für die Raumfahrt ist, wie sich ein kleiner dritter Körper (Satellit) im Bereich zweier sich umkreisenden Körpern (z.B. Erde und Sonne) benimmt. Der französische Mathematiker Lagrange hat *fünf* Punkte im rotierenden System errechnet, an welchen sich die Kraftsumme für den Satelliten zu null addiert. Die Punkte heißen *Lagrange-Punkte* bzw. *Librationspunkte*, sie rotieren synchron mit der Erde um die Sonne. Eigentlich würde man nur *einen* kräftefreien Punkt zwischen Erde und Sonne (bei  $L_1$ ) vermuten, an welchem sich die Anziehungskräfte

von Sonne und Erde *direkt* aufheben. Aber ähnlich der Gezeitenwelle auf der *mondabgewandten* Seite der Erde im System Erde-Mond, gibt es noch  $L_2$  und  $L_3$ ,

an deren aufgrund der Zentrifugalkraft ebenfalls Kräftefreiheit herrscht. Alle drei Punkte  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  rotieren auf

der Verbindungsgerade durch Erde und Sonne. Der Aufenthalt an diesen drei Punkte ist jeweils *instabil*. Weltraumraumschrott driftet langsam aus ihnen heraus. Ein Satellit hingegen kann hier, mit minimalem Korrekturaufwand, seine Position *stabilisieren*. In  $L_1$  sind Forschungssatelliten zur Sonnenbe-

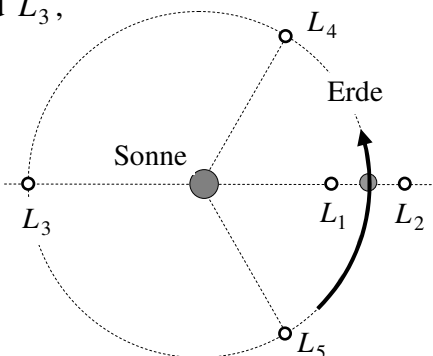
obachtung positioniert. In  $L_2$  hat man Abschattung, so dass

von dort aus die vom Urknall herrührende kosmische Hintergrundstrahlung beobachtet werden kann. In  $L_3$  hat die Science-Fiction-Literatur eine „Gegenerde“ vermutet, die für uns stets hinter

der Sonne verbleibt, was aber mit der Instabilität nicht verträglich wäre. Die Punkte  $L_4$  und

$L_5$  sind hingegen *stabil*. Sonne-Erde- $L_4$  bzw. Sonne-Erde- $L_5$  bilden ein gleichseitiges Dreieck.

$L_4$  und  $L_5$  werden umkreist von Weltraumstaub und Kleinasteroiden. Diese nennt man Trojaner, weil sie wie Hektor und Achilles „Troja“ umlaufen.



**K) Aufgaben und Referatthemen (R)**

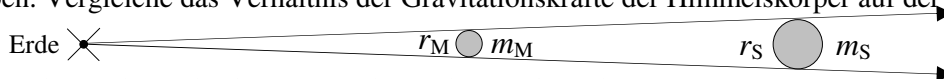
- 1) Warum stehen die Sternbilder in südlichen Ländern höher über dem Horizont? Skizziere.
- 2) Beschreibe die Messung des Erdumfanges durch Eratosthenes. Skizziere die Stellung der Erde im Sonnensystem zur Zeit der Sommersonnenwende. Erkläre den nördlichen Wendekreis.
- 3) Berechne die Blickweite zum Horizont am Meeresstrand.

Höhe $h$	1,75 m	40 m	100 m	500 m
Schweite $s$				

- 4) **R:** Erläutere die Epizyklentheorie des Ptolemäus.
- 5) Benenne die Modifikation, welche Kepler am kopernikanischen Weltbild vornahm.
- 6) Vollziehe Newtons Mondrechnung nach und weise nach, dass es für Newton nahe lag, ein quadratisches Abstandsgesetz für die Gravitation anzunehmen.
- 7) **R:** Wie konnte man zu Newtons Zeiten die Mondentfernung kennen?
- 8) **R:** Wie hat Cavendish im Labor „die Erde gewogen“, erkläre die Messapparatur?
- 9) Die Masse des weltgrößten Öltankers Viking beträgt ca. 560 000 t. Das Schiff ist etwa 70 m breit.
  - a) Mit welcher Kraft würden sich zwei solche Schiffe gravitativ anziehen, wenn sie nebeneinander liegend einen Abstand ihrer Schiffwände von 50 m hätten?
  - b) Wie lange dauert es auf Grund dessen bis zum Zusammenprall, wenn das Wasser reibungsfrei gedacht wird und die Zunahme der Gravitation durch die Annäherung vernachlässigt wird?
- 10) Berechne die Ortsfaktoren in verschiedenen Höhen  $h$  über der Erdoberfläche

Höhe $h$	0 m	9 km	500 km	36000 km	380 000 km
Radius $R$					
Ortsfaktor $g$					
Bem.	Boden	Höchster Berg	Niedr. Satellitenbahn	Geostationäre Bahn	Mondabstand

- 11) Berechne die Kraft, welche zwei gleich große Bleikugeln der Masse  $m = 20\text{ kg}$  im Abstand  $r = 8\text{ cm}$  aufeinander ausüben.
- 12) Berechne die Ortsfaktoren auf Mond- und Marsoberfläche aus dem Gravitationsgesetz
- 13) Wo liegt der Punkt zwischen Erde und Mond, an welchem sich die Gravitationskräfte aufheben?
- 14) Bei Sonnenfinsternis verdeckt der Mond gerade die Sonne. Nimm an, dass beide die gleiche Dichte haben. Vergleiche das Verhältnis der Gravitationskräfte der Himmelskörper auf der Erde.



- 15) **R:** Tycho Brahe und Johannes Kepler, Leben und Werk.
- 16) Leite für die stabile Kreisbahn eines Himmelskörpers im Zentralfeld die Beziehungen zwischen
  - a) Radius und Geschwindigkeit
  - b) Radius und Umlaufzeit
  - c) Geschwindigkeit und Umlaufzeit
 her.
- 17)
  - a) Leite die Formel der potentiellen Energie einer Masse  $m$  im Abstand  $r$  von der Masse  $M$  her.
  - b) Leite die Formel für  $E_{\text{kin}}$  einer Masse  $m$  auf einer stabilen Kreisbahn um  $M$  her.
  - c) Drücke die Gesamtenergie  $E_{\text{Ges}}$  von  $m$  auf einer stabilen Kreisbahn durch  $r$  bzw. durch  $v$  aus.
- 18) **R:** Vom Sputnik zur ISS.
- 19) Der Radius einer stabilen Kreisbahn wird vervierfacht. Wie ändern sich  $v$  und  $T$ ?
- 20) Ein Satellit befindet sich auf einer stabilen Kreisbahn um die Erde. Fülle die Fächer.

	$h$	$r$	$v$	$T$
a)	200 km			
b)				24 h
c)			14 000 km / h	
d)		384 400 km		

- 21) Ein Erdsatellit ( $m = 500\text{ kg}$ ) soll von einer Kreisbahn in der Höhe  $h_1 = 200\text{ km}$  auf eine Kreisbahn in der Höhe  $h_2 = 1000\text{ km}$  gehoben werden. Wieviel kinetische Energie müssen die Triebwerke abgeben, wenn der Masseverlust nicht berücksichtigt wird?  
In welchem Verhältnis stehen die Geschwindigkeiten in den beiden Orbits?
- 22) Ein Erdsatellit ( $m = 2,5\text{ t}$ ) soll von einer Bahn in 200 km Höhe auf die doppelte Höhe geschossen werden. Berechne die erforderliche Energie sowie die Geschwindigkeitsänderung.
- 23) Welche Energie ist erforderlich, um einen Erdsatelliten ( $m = 500\text{ kg}$ ) von einer stabilen Kreisbahn in der Höhe  $h_1 = 200\text{ km}$  bis nach  $r_2 = \infty$  zu heben?
- 24) Vergleiche die Werte der 1. und 2. kosmischen Geschwindigkeit für Erde und Mond.

- 25) Die Verhältnisse der Radien und Massen von Mars und Erde betragen  $r_M / r_E = 1,5237$  und  $m_M / m_E = 0,1074$ . Berechne für eine oberflächennahe Kreisbahn die Verhältnisse der Umlaufzeiten, Bahngeschwindigkeiten und Gesamtenergien.
- 26) Wie erscheint eine nicht-äquatoriale geostationäre Bahn von der Erde aus?
- 27) Berechne die Daten einer lunarstationären Bahn. Ist solch eine Bahn realistisch?
- 28) Aus dem 3. Keplerschen Gesetz ergibt sich für zwei Satelliten bzw. Planeten auf Kreis- oder Ellipsenbahnen die häufig anzutreffende Formel  $T_1^2 / T_2^2 = a_1^3 / a_2^3$ . Für Umlaufzeit und Radius des Mondes um die Erde gilt  $T_1 = 27,3d$  und  $a_1 = 384000km$ . Daraus soll die Umlaufzeit einer Mondfähre in  $200 km$  Höhe über der Mondoberfläche berechnet werden. Ist die Formel anwendbar?
- 29) Die Flughöhe der Ellipsenbahn des Sputniks über der Erdoberfläche variierte anfänglich zwischen  $215km$  und  $939km$ . a) Berechne die Halbachsen  $a$  und  $b$  der Ellipse. b) Berechne die Umlaufzeit  $T$ . c) Bestimme mit Hilfe des Flächensatzes das Verhältnis von Aphel- und Perihelgeschwindigkeit.
- 30) Ein Geschoss der Masse  $m = 50kg$  wird aus einer „Ultrakanone“ mit  $v = 7 km/s$  von der Erdoberfläche *senkrecht* empor geschossen. Die Luftreibung werde vernachlässigt. Das Geschoss fällt nach Erreichen seines Hochpunktes wieder senkrecht herab, es tritt *nicht* in eine Kreisbahn ein. Wie hoch steigt das Geschoss auf? Wie hoch würde es aufsteigen, wenn der Ortsfaktor  $g = 9,81m/s^2$  konstant bliebe?
- 31) **R:** Erkläre das Zustandekommen der *Lagrange-Punkte* beim Dreikörperproblem, sowie die Bedeutung dieser Punkte für die Raumfahrt.

### Lösungen

- 1) Skizze ...
- 2) Eratosthenes maß am Tage der Sommersonnenwende zur Mittagszeit ...
- 3)
- |              |         |         |         |         |
|--------------|---------|---------|---------|---------|
| Höhe $h$     | 1,75 m  | 40 m    | 100 m   | 500 m   |
| Sehweite $s$ | 4,72 km | 22,6 km | 35,7 km | 79,8 km |
- 4) Er erklärte die Rückwärtsbewegung der Planeten durch Epizyklen, die auf den Hauptspähren abrollen.
- 5) Kepler ersetzte auf Grund der Messdaten von Tycho Brahe die idealen Kopernikuskreise durch Ellipsen. Für diese erkannte er seine *drei* Keplerschen Gesetze.
- 6) Siehe S. 4
- 7) Durch Peilung und genaue Winkelmessung, genauer ...
- 8) Er wusste, dass Ortsfaktor  $g$  und Gravitationskonstante  $\gamma$  durch  $R_E$  und  $M_E$  verbunden sind. Aus der Messung von  $\gamma$  und Kenntnis von  $g$  und  $R_E$  konnte er so auf  $M_E$  schließen.
- 9) Der Schwerpunktabstand beträgt  $r = (50 + 2 \cdot 35)m = 120m \Rightarrow F_G = 1,453kN$ . Aus  $F = m \cdot a$  und  $s = (1/2)at^2$  folgt mit  $s = 25m$ :  $t \approx 73 \text{ min}$ .
- 10)  $\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11} m^3 / kg \cdot s^2$ ;  $M_E = 5,97 \cdot 10^{24} kg$ ;  $R_E = 6,37 \cdot 10^6 m$
- |                           |       |      |        |          |            |
|---------------------------|-------|------|--------|----------|------------|
| Höhe $h$                  | 0 m   | 9 km | 500 km | 36000 km | 380 000 km |
| Ortsfaktor $g$ in $m/s^2$ | 9,818 | 9,79 | 8,441  | 0,222    | 0,0027     |
- 11)  $F_G = 4,15 \mu N$
- 12)  $M_{Mond} = 7,35 \cdot 10^{22} kg$ ;  $R_{Mond} = 1,74 \cdot 10^6 m$ ;  $g_{Mond} = 1,62ms^{-2}$ ;  $M_{Mars} = 6,41 \cdot 10^{23} kg$ ;  $R_{Mars} = 3,4 \cdot 10^6 m$ ;  $g_{Mars} \approx 3,71ms^{-2}$
- 13) Die Entfernungen des neutralen Punktes zu Erde und Mond seien  $x$  und  $y$ . Aus  $\gamma \cdot M_E \cdot m / x^2 = \gamma \cdot M_M \cdot m / y^2 \Rightarrow \Rightarrow y = x \cdot \sqrt{M_M / M_E}$ . Einsetzen in  $x + y = R_{ME}$  liefert  $x = 345648 km$  und  $y = 38352 km$ .
- 14)  $m_S / m_M = (r_S / r_M)^3 \Rightarrow F_S / F_M = (m_S / r_S^2) : (m_M / r_M^2) = r_S / r_M$ . Die Sonne zieht trotz der Entf. stärker als d. Mond.
- 15) Referat.
- 16) Siehe S.6
- 17) Siehe S.7
- 18) Referat.
- 19)  $v$  halbiert sich,  $T$  verachtfacht sich.
- 20)
- |    |            |            |             |            |
|----|------------|------------|-------------|------------|
|    | $h$        | $r$        | $v$         | $T$        |
| a) | 200 km     | 6570 km    | 28 033 km/h | 1,473 h    |
| b) | 35 863 km  | 42233 km   | 11 057 km/h | 24 h       |
| c) | 19 972 km  | 26 342 km  | 14 000 km/h | 11,82 h    |
| d) | 378 030 km | 384 400 km | 3665 km/h   | 27,46 Tage |
- 21)  $\Delta E_G = 1,645 \cdot 10^9 J$ ;  $v(h = 200km) = 7787m/s$ ;  $v(h = 1000km) = 7352m/s$ ;  $Verh = 1,059$
- 22)  $\Delta E_G = 2,239 \cdot 10^9 J$ ;  $v(h = 200km) = 7787m/s$ ;  $v(h = 400km) = 7671m/s$ ;  $\Delta v = 115,9m/s$ .

23)  $\Delta E_G = 15,159 \cdot 10^9 J$  ;

24)  $v_{K1,Erde} = 7,9 m/s$  ;  $v_{K2,Erde} = 11,2 m/s$  ;  $v_{K1,Mond} = 1,68 m/s$  ;  $v_{K2,Mond} = 2,37 m/s$

25) Die Verhältnisse mögen  $Q$  (Quotient) heißen:  $Q_T = 1,88$  ;  $Q_v = 0,81$  ;  $Q_{Ekin} = Q_{Epot} = Q_{EGes} = 0,07$

26) „Achten“ längs Längengraden.

27) Umlaufzeit  $T = 27,23 \cdot 24 \cdot 3600 s$  ;  $r = 88265 km$  . Kommt zu sehr in Erdnähe.

28) Nein, die Formel gilt *nur* für die Bahnen von zwei (kleinen) Körpern um *denselben* Zentralkörper.

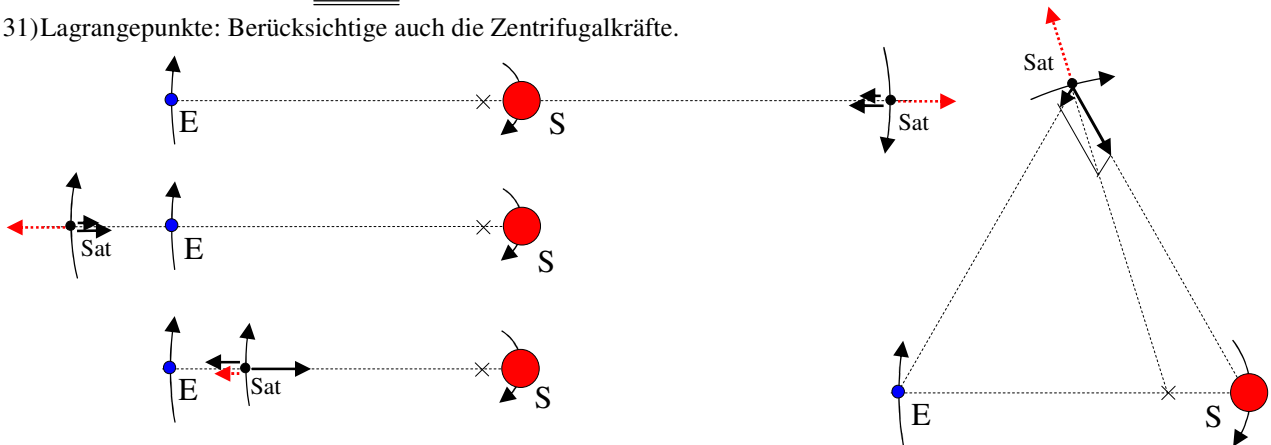
29) Zunächst gilt  $r_{Aphel} = R_E + 215 km$  ;  $r_{Peri} = R_E + 939 km$  und für die Ellipse  $r_{Aphel} + r_{Peri} = 2a$  sowie

$a - r_{Aphel} = \sqrt{a^2 - b^2}$  . a) Daraus folgen  $a = 6947 km$  ;  $b = 6938 km$    b)  $T = \sqrt{4\pi^2 a^3 / \gamma M_E} = 96,1 min$

c) Der Flächensatz sagt  $r \cdot v \cdot \sin \alpha = const$  . Am Aphel und Perihel ist  $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \frac{v_A}{v_P} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \approx 1,11$

30)  $E_{kin} = 0,5mv^2 = 1,225 \cdot 10^9 J$  wird verwendet, um die Differenz  $\Delta E_{pot} = \gamma m M_E ((-R_E + h)^{-1} + R_E^{-1})$  zu überwinden. Auflösen liefert  $h = 4103 km$  . Im 2.Fall muss  $\Delta E_{pot} = mgh$  überwunden werden.  $\Rightarrow h_g = 2497 km$  .

31) Lagrangepunkte: Berücksichtige auch die Zentrifugalkräfte.



## Gemischte Aufgaben, Gravitation und Planetenbewegung.

### A) Verständnisaufgaben

- 1) Vergleiche das Verhalten der Schwerkraft in Bodennähe mit dem in großer Höhe.
- 2) Kann ein Satellit antriebslos eine exzentrische *Kreisbahn* durchlaufen?
- 3) Der Mond umläuft die Erde näherungsweise auf einer Kreisbahn.  
Wo befindet sich der Mittelpunkt dieser Kreisbahn?
- 4) Welche Bedingung liegt der zentrischen antriebslosen Kreisbahn eines Satelliten zugrunde?
- 5) Wie lauten die drei Keplerschen Gesetze und auf welche Bahnform beziehen sie sich?
- 6) Wie modifizieren sich die Keplerschen Gesetze im Fall der Kreisbahn?
- 7) Was ist eine geostationäre Bahn?
- 8) Wie lautet der Abstandsexponent der Gravitationskraft einer (punktförmigen) Masse?
- 9) Wie lautet der Abstandsexponent der potentiellen Energie einer (punktförmigen) Masse?
- 10) Welches Vorzeichen hat die potentielle Energie einer (punktförmigen) Masse?
- 11) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Gravitationskraft und potentieller Energie?
- 12) Wie setzt sich die Gesamtenergie einer bewegten Masse grundsätzlich zusammen?
- 13) Warum ist die (negative) Gesamtenergie für gebundene immer halb so groß wie die negative potentielle Energie?
- 14) Nenne Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen gravitativer und elektrischer Kraft.
- 15) Gibt es bei Gravitation und Elektrizität auch homogene Felder?
- 16) Beschreibe kurz das Ptolemäische Weltbild.
- 17) Lässt sich das 3. Kepler G.  $r_1^3 / r_2^3 = T_1^2 / T_2^2$  auf das Paar Marsmond-Erdmond anwenden?

## B) Gesetze, Formeln, auswendig lernen, herleiten

- 1) Gib folgende Gesetze an: Gravitationsgesetz ; Zentrifugalkraft ; 2. Newtonsches Gesetz; Potentielle Energie im Feld einer punktförmigen Masse; Gesamtenergie auf Kreisbahn um punktförmige Masse.
- 2) Leite folgende Gesetze her:  $g \cdot R_E^2 = \gamma \cdot M_E$  ;  $v \cdot T = 2\pi r$  ;  $r v^2 = \gamma M$  ;  $4\pi^2 r^3 = \gamma M T^2$  ;  $2\pi \gamma M = v^3 T$  ; 3. Keplersches Gesetz in der Form  $r_1^3 / r_2^3 = T_1^2 / T_2^2$  ;  $v_1^3 / v_2^3 = T_2 / T_1$  ;  
1. kosm. Geschw.  $v_{K1} = \sqrt{\gamma M_E / R_E}$  ; 2. kosm. Geschw.  $v_{K1} = \sqrt{2\gamma M_E / R_E}$  ;  
Radius der geostationären Bahn  $r_{geost} = \sqrt[3]{\gamma M_E T^2 / 4\pi^2}$

## C) Aufgaben zum Gravitationsgesetz

- 1) Die Schwerpunkte zweier Massen von je 20 000 t haben 100m Abstand. Berechne  $F_G$ .
- 2) Berechne aus  $R_E = 6370km$  und  $g = 9,81m/s^2$  die Erdmasse und Erddichte.
- 3) In welcher Höhe über der Erde beträgt die Erdbeschleunigung 95% des  $g$ -Wertes  $9,81ms^{-2}$ ?
- 4) Gib prozentuale Minderung der Gewichtskraft auf  $m = 1kg$  an, wenn die Masse vom Erdboden auf 500 km Höhe versetzt ist. Wie groß ist die prozentuale Minderung für  $m = 5kg$ ?
- 5) Ein Wetterballon platzt in 40km Höhe. Mit welcher Anfangsbeschleunigung stürzen Teile ab?
- 6) Die Erdmasse ist 81 mal so groß wie die Mondmasse. Die Radien verhalten sich wie 11 : 3. Wie groß ist die Fallbeschleunigung auf dem Mond bei gleicher Dichte  $\rho$ ?

## D) Aufgaben zur Energieerhaltung

- 1) Mit welcher Geschwindigkeit muss ein Körper von der Erdoberfläche senkrecht abgeschossen werden, damit bis zu einer Höhe von 6370km aufsteigt und dann wieder runterfällt? (o.Reibg)
- 2) Wie hoch steigt ein Körper, der mit  $v = 6km/s$  senkrecht abgeschossen wurde? (o.Luftreibg)
- 3) Wieviel Arbeit ist nötig, um  $m = 10kg$  vom Erdboden auf 8,9 km Höhe zu bringen?
- 4) Wieviel *Joule* sind erforderlich, um  $m = 10kg$  gänzlich aus dem Schwerfeld zu entfernen? Mit welcher Geschwindigkeit  $v$  muss man die Masse dafür abschießen? Wie heißt dieses  $v$ ?
- 5) Mit welcher Geschwindigkeit erreicht ein Körper die Erdoberfläche, wenn man ihn aus dem Unendlichen fallen lässt? (ohne Luftreibung).
- 6) Die mittlere Entfernung der Mittelpunkte von Erde und Mond beträgt 384 000 km. Die Erdmasse ist 81 mal größer als die Mondmasse. Welcher Punkt dazwischen ist schwerkraftfrei? Der Punkt dreht sich mit. Wie verschiebt er sich, wenn die Zentrifugalkr. berücksichtigt wird?
- 7) Ein System aus zwei Sternen von gleicher(m) Masse  $M$  und Radius  $R$  haben den Mittelpunktsabstand  $a > 2 \cdot R$ . Berechne die Arbeit, um  $m$  von einem Stern zum anderen zu bringen.

## E) Aufgaben zur Bahnberechnung von Satelliten bzw. Planeten

- 1) Ein Satellit umkreist die Erde so, dass seine Umlaufzeit gleich der Umdrehungszeit der Erde gegenüber dem Fixsternhimmel ist. Wie heißt die Bahn? Wie groß ist die Flughöhe?  
a) Startgeschwindigkeit vom Erdboden? b) Startgeschwindigkeit vom 200 km-Orbit?
- 2) Ein Satellit umkreist die Erde in 10000km Höhe. Wie groß sind  $v$  und  $T$ ? Überschallknall?
- 3) Der Mondmittelpunkt umkreist den 384 000 km entfernten Erdmittelpunkt an 28 Tagen. Welchen Bahnradius muss auf Grund dessen eine geostationäre Bahn haben?
- 4) Elliptische Sputnikbahn: Perigäum = 215km, Apogäum = 939km.  $T = 96 min$ . Berechne die große Halbachse  $a$ . Wie hoch verläuft eine Kreisbahn gleicher Energie?
- 5) Wie sieht die Kreisbahn aus, die mit der 1. kosm. Geschwindigkeit  $v_{K1}$  gestartet wird? Wie groß ist  $v_{K1}$ ? Wie hoch fliegt eine Rakete, wenn man sie mit  $v_{K1}$  senkrecht empor schießt?
- 6) Wie groß sind die 1. und 2. kosmische Geschwindigkeit beim Mars?  $M_{Mars} = 6,388 \cdot 10^{23} kg$  ;  $R_{Mars} = 3397km$ . Der siderische Marstag stimmt mit den der Erde fast überein. Wie hoch verläuft die „Marsstationäre“ Bahn?



## Lösungen

Verwendete Konstanten:  $\gamma = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

$\gamma = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$  ;  $R_E = 6378 \text{ km}$  ;  $M_E = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  ;  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

### A) Verständnisaufgaben

- 1) In Bodennähe ist die Schwerkraft (fast) höhenunabhängig:  $F_G = m \cdot g$  . Diese Formel ist nur eine Näherung der allgemeinen Formel  $F_G = \gamma \cdot M_E \cdot m / r^2$  , die für große Höhen zwingend ist.
- 2) Für antriebslose Satelliten müssen die Mittelpunkte von Kreisbahn und Erde übereinstimmen.
- 3) Der Mond ist ein „Satellit“ mit nicht zu vernachlässigender Masse. Mond und Erde bewegen sich auf Kreisbahnen, um deren gemeinsamen Schwerpunkt, welcher stets auf der mondzugewandten Seite minimal unter der Erdoberfläche liegt. Siehe auch „hintere“ Gezeitenwelle.
- 4) Gravitationskraft und Zentrifugalkraft müssen sich an jedem Punkt des Umlaufes aufheben.
- 5) 1. Die Planeten bewegen sich auf *elliptischen* Bahnen, in deren *einem* Brennpunkt die Sonne steht 2. Flächensatz: In gleichen Zeiten überstreicht der Planet gleichgroße Flächen zur Sonne. 3. Für zwei Planeten *desselben* Systems gilt: Das Verhältnis der Kuben ihrer großen Halbachsen ist gleich den Verhältnis der Quadrate ihrer Umlaufzeiten.
- 6) 1. *Brennpunkt* wird zum *Mittelpunkt*. 2. *Umlaufgeschwindigkeit* ist *konstant*. 3. Das Verhältnis der Kuben der Radien ist gleich dem Verhältnis der Quadrate der Umlaufzeiten *bleibt*.
- 7) Bei einer geostationären Bahn beträgt die Umlaufzeit des Satelliten genau einen Tag. Ist die Bahn äquatorial, dann steht der Satellit über einem Äquatorpunkt still.
- 8) Die Gravitationskraft nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab,  $r^{-2}$  . Exponent =  $-2$
- 9) Die potentielle Energie nimmt mit umgekehrt prop. zur der Entfernung ab,  $r^{-1}$  , Exponent =  $-1$
- 10) Sie ist negativ, weil ihr Wert erst in unendlicher Entfernung null ist.
- 11)  $W_{pot}(r)$  erhält man, wenn  $m$  in Richtung der Kraft von  $\infty$  bis  $r$  gebracht wird. Dabei erhält man Arbeit, welche dem anfänglichen  $W_{pot}(\infty) = 0$  entnommen wird, sodass  $W_{pot}(r)$  negativ ist. Die Kraft nimmt bei der Annäherung zu, so dass man nicht einfach „Arbeit = Kraft  $\times$  Weg“, also  $W_{pot} = F \cdot \Delta s$  schreiben kann. Es gilt  $W_{pot}(r) = -\int_{\infty}^r F dr = -\int_{\infty}^r \frac{-\gamma \cdot M_E \cdot m}{r^2} dr$  .  
Integration ergibt  $W_{pot}(r) = \gamma M_E m \cdot \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = \gamma M_E m \cdot \left[ -\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = -\gamma M_E m \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = -\frac{\gamma M_E m}{r}$  .
- 12)  $W_{ges} = W_{kin} + W_{pot}$
- 13) Eine Besonderheit der Kreisbewegung im  $1/r^2$  - Feld ist, dass die kinetische Energie stets halb so groß ist, wie die potentielle Energie. Da aber  $W_{kin} > 0$  und  $W_{pot} < 0$  ist, folgt das.
- 14) Punktförmige „Quellen“ umgeben sich mit einem quadratisch abnehmenden Feld, Newton:  $F_G = \gamma \cdot M_1 \cdot M_2 / r^2$  , Coulomb:  $F_{el} = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot Q_1 \cdot Q_2 / r^2$  . Elektrizität hat zwei Pole, Gravitation hat nur einen „Pol“.
- 15) Ein homogenes elektrisches Feld herrscht zwischen zwei Kondensatorplatten. Ein homogener Gravitationsfeld liegt näherungsweise im Nahbereich über der Erdoberfläche vor.
- 16) Nach Ptolemäus ziehen Sonne, Mond und alle Planeten Kreise um die Erde. Während Sonne und Mond direkt darauf umlaufen, sitzen die Planeten auf rotierenden umlaufenden Epizyklen (Nebenkreisen). Daraus erklärt sich ihre zeitweilige Rückläufigkeit aus Erdsicht.
- 17) Nein, die Formel gilt nur für Satelliten/Planeten, welche das gleiche Zentrum umlaufen.

### B) Gesetze, Formeln, auswendig lernen, herleiten

- 1) Gravitationsgesetz  $F_G = \gamma \cdot M_1 \cdot M_2 / r^2$  ; Zentrifugalkraft  $F_Z = m v^2 / r$  ; 2. Newt  $F = m \cdot a$  ;  
 $W_{pot} = -\gamma M_E m / r$  ;  $W_{Ges} = -\gamma M_E m / 2r$  .

2) Spezialfall: Für Bodennähe  $M_1 = M_E$ ;  $M_2 = m$ ;  $r = R_E$  in  $F_G = \gamma \cdot M_1 \cdot M_2 / r^2$  einsetzen. Dann Gleichsetzen mit  $F_G = m \cdot g$  liefert  $g \cdot R_E^2 = \gamma \cdot M_E$ .

Für stabile Kreisbahn gilt  $F_Z = F_G$  folgt  $m v^2 / r = \gamma m M / r^2 \Rightarrow r v^2 = \gamma M$ . Mit  $v = 2\pi r / T$  wird daraus  $4\pi^2 r^3 = \gamma M T^2$  bzw.  $2\pi \gamma M = v^3 T$ . Stellt man  $4\pi^2 r^3 = \gamma M T^2$  bzw.

$2\pi \gamma M = v^3 T$  für zwei Satelliten, welche dieselbe Masse  $M$  umkreisen auf und teilt die Gleichungen durcheinander, so erhält man  $r_1^3 / r_2^3 = T_1^2 / T_2^2$  bzw.  $v_1^3 / v_2^3 = T_2 / T_1$ .

Für die 1. kosm. Geschw. setzt man  $r = R_E$  und  $M = M_E$  in  $r v^2 = \gamma M$ .

Die 2. kosm. Geschw. erhält man aus dem Energieforderung für das Unendliche übertragen auf den Startpunkt an der Erdoberfläche  $0 = W_{Ges} = W_{kin} + W_{pot} = 1/2 \cdot m v^2 + \left( -\frac{\gamma m M_E}{R_E} \right)$ .

Den geost. Bahnradius erhält man durch Einsetzen von  $T = 24 \cdot 3600s$  in  $4\pi^2 r^3 = \gamma M T^2$ .

### C) Aufgaben zum Gravitationsgesetz.

1)  $F_G = \gamma \cdot M_1 \cdot M_2 / r^2 = 2,67 N$

2)  $M_E = \frac{g \cdot R_E^2}{\gamma} = 5,981 \cdot 10^{24} kg$ ;  $V = 4/3 \pi R_E^3$ ;  $\rho = M_E / V = 5503 kg / m^3$

3) Aus  $\gamma \cdot \frac{M_E}{(R_E + h)^2} = 0,95 \cdot g$  folgt  $h = 162,1 km$

4) Ortsfaktor in  $h = 500 \cdot 10^3 m$ :  $\frac{g(h)}{g} = \frac{\gamma \cdot M_E}{(R_E + h)^2} \cdot \frac{1}{g} = 0,86 \Rightarrow 14\% \text{ Minderung auch für } 5 kg$ .

5)  $g(h) = \frac{\gamma \cdot M_E}{(R_E + h)^2} = 8,43 m s^{-2}$

6)  $g_M = \frac{\gamma \cdot M_M}{R_M^2}$ ;  $g_E = \frac{\gamma \cdot M_E}{R_E^2}$ ;  $\frac{g_M}{g_E} = \frac{M_M}{M_E} \cdot \frac{R_E^2}{R_M^2} = 0,166 \Rightarrow g_M = 1,63 m s^{-2}$

### D) Aufgaben zur Energieerhaltung

1) Aus  $W_{pot}(r) = -\gamma M_E m / r$  und  $1/2 m v^2 = W_{pot}(R_E + h) - W_{pot}(R_E) \Rightarrow v = 7900 m / s$

2) Aus  $\frac{1}{2} m v^2 = W_{pot}(R_E + h) - W_{pot}(R_E) \Rightarrow h = \frac{\gamma \cdot M_E}{\frac{\gamma \cdot M_E}{R_E} - \frac{1}{2} v^2} - R_E = 2580 km$

3)  $\Delta W_{pot} = W_{pot}(R_E + h) - W_{pot}(R_E) = 870,9 kJ$

4)  $\Delta W_{pot} = 0 - W_{pot}(R_E) = -(-\gamma M_E m) / R_E = 625 MJ$

5) Im  $\infty$  ist  $W_{ges} = 0$ . Auf der Erde  $W_{ges} = 1/2 m v^2 + W_{pot}(R_E) = 1/2 m v^2 - \gamma M_E m / R_E$ .

Gleichsetzen:  $v = \sqrt{2\gamma M_E / R_E} = 40249 km / h$ . Das ist genau die 2. kosm. Geschwindigkeit.

6) Sei  $x$  der Abstand des Punktes vom Erdmittelpunkt, dann folgt  $\frac{\gamma \cdot M_E \cdot m}{x^2} = \frac{\gamma \cdot M_M \cdot m}{(R_{EM} - x)^2}$ .

$\Rightarrow x = \frac{R_{EM}}{1 + \sqrt{M_M / M_E}} = 345660 km$  oder 90% von  $R_{EM}$ . Die Zentrifugalkraft schleudert eine

Masse an diesen Punkt zum Mond hin. Also ist der kräftefreie Punkt etwas erdnäher.

7) Bei der Entfernung vom ersten Stern muss man zunächst Arbeit verrichten.

Ab der Mitte überwiegt die Anziehung des zweiten Sternes und man erhält denselben Betrag zurück. Insgesamt ist die aufzuwendende Arbeit gleich null.

### E) Aufgaben zur Bahnberechnung von Satelliten bzw. Planeten

1) Es handelt sich um die geostationäre Bahn.  $T = 24 \cdot 3600s$  in  $4\pi^2 r^3 = \gamma M_E T^2$  einsetzen liefert  $r_{geost} = 42\,242\,km$  bzw.  $h_{geost} = r_{geost} - R_E = 35\,864\,km$ . Die erforderlichen Geschw. erhält man immer durch  $\frac{1}{2}mv^2 = W_{Ziel} - W_{Start}$ . *Start = Boden* heißt stets  $W_{Start} = W_{pot} = -\gamma m M_E / r$ , weil die Rakete am Boden „ruht“ (Erddreh. wird vernachlässigt). Dagegen ist  $W_{Orbit} = W_{Ges} = \frac{-\gamma m M_E}{2r}$ , weil im Orbit die Umlaufbewegung dazukommt. a)  $\frac{mv^2}{2} = \frac{-\gamma m M_E}{2r_{geost}} - \frac{-\gamma m M_E}{R_E} \Rightarrow$

$$v = 10,750\,km/s \quad \text{b) } \frac{mv^2}{2} = \frac{-\gamma m M_E}{2r_{geost}} - \frac{-\gamma m M_E}{2 \cdot (R_E + h)} \Rightarrow v = 7,153\,km/s$$

2)  $v = \sqrt{\gamma M_E / (R_E + h)} = 4,93\,km/s$ ;  $T = \sqrt{4\pi^2 (R_E + h)^3 / \gamma M_E} = 20860s$ . Die Geschw. beträgt ein Vielfaches der Schallgeschw.. Doch nur beim Eintritt in die Atmosphäre hört man das.

3) Beide umkreisen die Erde  $\Rightarrow r_1^3 / r_2^3 = T_1^2 / T_2^2$  ist anwendbar.  $r_{geo} = \sqrt[3]{r_{EM}^3 \cdot T_{geo}^2 / T_M^2} = 41,6 \cdot 10^6\,m$

4) Große Halbachse:  $a = (r_E + h_{peri} + r_E + h_{apo}) / 2 = 6947\,km$ . Beim Kreis wird  $a$  zu  $r$ .

Da die Energie nur von  $a$  abhängt, gilt auch  $r = 6947\,km$  bzw.  $h = r - R_E = 577\,km$ .

$$5) v_{K1} = \sqrt{\frac{\gamma M_E}{R_E}} = 7,9\,km/s. \quad \frac{1}{2}mv_{K1}^2 = \frac{-\gamma m M_E}{R_E + h} - \frac{-\gamma m M_E}{R_E} \Rightarrow h = \frac{\gamma \cdot M_E}{\frac{\gamma \cdot M_E}{R_E} - \frac{v_{K1}^2}{2}} - R_E = 6378\,km$$

$$6) v_{K1} = \sqrt{\frac{\gamma M_{Mars}}{R_{Mars}}} = 3,54\,km/s; \quad v_{K2} = \sqrt{\frac{2\gamma M_{Mars}}{R_{Mars}}} = 5,01\,km/s; \quad r_{Marso} = \sqrt[3]{\frac{\gamma M_{Mars} T^2}{4\pi^2}} = 20050\,km.$$

