Roter Faden Physik

https://roter-faden-physik.de/

Klassische Mechanik

1. Auflage

Zeit und Raum, Newtons Gesetze, Kräfte
Schwerpunkt, Impuls, Stoß, Energie, Arbeit, Leistung
Freier Fall, schiefer Wurf

Mit Aufgaben und Lösungen

von

Dr. Ortwin Fromm

Evangelische Schule Frohnau, Berlin

A) Über die Physik

Die klassische Mechanik gilt als Prototyp der Naturwissenschaften schlechthin, sie wurde im 17. Jahrhundert von Galilei, Huygens und Newton entwickelt und begründete letztlich die Vormachtstellung der europäischen Kulturen während der Neuzeit. Deshalb ist es angebracht darüber nachzudenken, was die Mechanik und die Physik allgemein, ist und was sie will. Physik ist eine Wissenschaft, welche die experimentell ermittelten Erfahrungstatsachen der Naturerscheinungen in die Sprache der Mathematik zu übertragen versucht, sodass Naturerscheinungen durch Rechnen vorhersagbar werden. Für einfache, leblose Körper gelingt dies perfekt. Auch komplexe Systeme, wie z.B. die Wetterbildung, sind beherrschbar, doch erfordern diese eine, mit der Vorhersagezeit exponentiell zunehmende, Rechenzeit.
Die Alchimie wurde überwunden, chemische Vorgänge sind physikalisch verständlich. Den Bereich der Lebensformen hat die Physik noch nicht durchdrungen, auch wenn die Strukturbildung an der Schwelle zum Lebenden mittlerweile physikalisch erfasst und mathematisch beschreibbar ist.
Mathematik ist eine Formalsprache. Sie arbeitet mit Mengen, Zahlen, Gleichungen, Funktionen, Operatoren, Punkten, Linien, Flächen und Räumen. Selbst Beweise als Ganzes sind Objekte der Mathematik, welche ihrerseits mathematischen Operationen unterliegen. Da geschieht es, dass von einem Satz bewiesen werden kann, dass er nicht beweisbar ist (Gödel (1906-1978)). Deshalb ist die Mathematik wesensmäßig unvollständig, sodass der „Mathematisierung der Welt“ Grenzen gesetzt sind. - Die Mathematik findet in unseren Gehirnen statt. Es ist nicht auszuschließen, dass die Welt als Ganzes zur Selbstähnlichkeit fähig ist. Dann würden sich Strukturen der Welt in irgendeinem seiner Teile widerspiegeln. Unser neuronales Netzwerk ist solch ein bescheidener Versuch.

Diese Bescheidenheit drückte Sokrates bereits vor ungefähr 2500 Jahren durch sein berühmtes „Ich weiß, dass ich nichts weiß“ aus und leitete damit ein Programm ein, nicht Wissen zu behaupten, sondern durch Zweifel und Kritik den Weg *zum* Wissen zu beschreiten.
Aus heutiger Sicht gilt eine naturwissenschaftliche Aussage nur dann als „wahr“, wenn sie auch falsch sein *kann*. Die Widerlegbarkeit (Falsifizierbarkeit, Popper(1902-1994)) stellt das Abgrenzungskriterium zu den Pseudowissenschaften dar, sie läuft über das Experiment. Dogmatische Aussagen sind somit im naturwissenschaftlichen Sinne „falsch“. Naturwissenschaftliche Aussagen müssen *scheitern* können und stellen deshalb nur Pflastersteine auf dem Weg zum Wissen dar. Die Denkfigur des Scheiternkönnens geht, wie gesagt, bereits auf die alten Griechen zurück. Die christliche Trinitätslehre intensiviert das: Diese Lehre besagt, dass die alte Gottheit mangelhaft ist. Als guter Schöpfer kann Gott zwar gerecht und gnädig, nicht aber mitleidig, nicht empathisch sein zu seiner Schöpfung. Die fehlende Mitleidsfähigkeit aber zerstört Allmacht und Gottsein. Das Mitleiden Gottes als Christus am Kreuz behebt den Defekt, so dass Gott tatsächlich erst in der Trinität zum wahren Gott wird.

Die naturwissenschaftliche Vorgehensweise, welche diese Selbstinfragestellung aufgreift, nennt man „hypothetisch-induktives Verfahren“: Aus einer *endlichen* Anzahl von Messergebnissen wird auf funktionale Zusammenhänge (Naturgesetze) geschlossen, wodurch auch Aussagen für die *unendlich* vielen Zwischenwerte erfolgen. Dieser Schluss von „endlich“ auf „unendlich“ heißt „Induktion“. Aber diese Schlussfolgerung ist hypothetisch, denn unendlich viele Aussagen lassen sich schon aus Zeitgründen niemals überprüfen.
Das Formelgebäude lässt sich zu einer Theorie zusammenschließen, so dass man durch Rechnen in völlig neue Bereiche der Anwendung vorstoßen kann. Wir wissen jedoch, dass das Ergebnis stets an der Erfahrung scheitern kann. Dann tritt der hypothetische Charakter zu Tage. Die Physik liefert also kein wahres Wissen, wohl aber einen beliebig langen Weg dorthin. Bisher ist jedenfalls keine prinzipielle Obergrenze für die Fähigkeiten des Denkens bekannt.

B) <u>Körper in Zeit und Raum. „Zustand“ beinhaltet „Sein“ *und* „Werden“.</u>

Die voll ausgearbeitete theoretische Mechanik geht auf Newton (1642-1727) zurück. Sie beschreibt die Bewegung von Körpern in Zeit und Raum.
Was aber sind Zeit und Raum? Newton war klar, dass diese Begriffe (zu seiner Zeit) nicht wissenschaftlich herleitbar waren, weshalb ihm nichts übrig blieb, als sie zu definieren: „Die absolute Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Bezug auf irgendeinen äußeren Gegenstand“. „Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich“. Kant (1724-1804) stellte fest, dass Raum und Zeit mit unsrem Bewusstsein zu tun haben, dass sie vorab (a priori) als Voraussetzungen zur Ermöglichung von Erfahrung gedacht werden *müssen*: Ohne diese Denkkategorien sei insbesondere die mathematische Darstellung der äußeren Sinneseindrücke unmöglich. Einstein (1879-1955) verschmolz Raum und Zeit dann zu einem vierdimensionalen Kontinuum, welches gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie durch die anwesenden Massen (bzw. Energiedichten) gekrümmt wird. Doch entfernt man gedanklich alle Massen, so bricht die Raum-Zeit nicht etwa zusammen, es verschwindet lediglich die Krümmung, der leere Raum und die leere Zeit bleiben. Was sind diese?
Anhand der Gedanken von Newton und Kant soll zunächst die „Erfindung der Zeit“ am geläufigen Beispiel der „Erfindung des Geldes“ veranschaulicht werden:

<u>*Geld*</u>: Arbeitsteilung und Tausch ermöglichten das Entstehen kleiner Clan-Gesellschaften. Der Wert der Güter bestimmte sich durch das Tauschverhältnis. Für jedes Warenpaar war solch ein Tauschverhältnis nötig, z.B. neun Kohlköpfe gegen zwei Hühner. Im matriarchalischen Dorf mit vielleicht $n = 10$ Produkten blieb die Anzahl der Tauschverhältnisse überschaubar, sie beträgt nämlich $N = ½ n \cdot (n - 1)$. Die $N = 45$ Tauschverhältnisse, bei $n = 10$ Waren, konnte jeder auch dann auswendig lernen, wenn die Verhältnisse sich verschoben und Zahlbezeichnungen dafür noch garnicht erfunden waren. Doch die Gesellschaft erweiterte sich rasch und mit ihr die Anzahl n der getauschten Produkte. Bei z.B. $n = 100$ Produkten gibt es bereits $N = 2250$ Tauschrelationen. Das konnte niemand überblicken.
Da N quadratisch mit n anwächst, entstanden zunehmende Marktverschiebungen, die zu Kollaps und Hungernot der nun übergroßen Bevölkerung führten. Die Rettung lag im Zufügen <u>*einer*</u> *weiteren* Ware, die jedoch ohne Gebrauchswert und ansich sinnlos und „leer“ war, nämlich des Goldes bzw. Geldes. Nun interessierten, bei n Produkten, nur noch die n Tauschrelationen gegenüber dem „leeren“ Gold. Da das Quadrat $N \approx ½ n^2$ so auf eine einfache Proportion $\overline{N} = n$ reduziert wurde, konnten jetzt Städte und ganze Reiche entstehen.

<u>*Zeit*</u>: Ereignisse und Geschehnisse wirken aufeinander. So vergräbt das Eichhörnchen als Wintervorrat Eicheln, vergisst sie aber zum Teil, sodass der Sprössling das Gras dort Jahre später zu Kleinwuchs zwingt. Zwischen Eiche und Gras besteht eine „Tauschrelation“. Mechanische Körper wirken schneller aufeinander und am schnellsten überträgt das Licht eine Information. Bei zunehmend vielen Teilnehmern des kausalen Austausches wächst auch hier die Anzahl der Wirkrelationen ins Unermessliche, zumal nun nicht nur Paarbeziehungen bestehen. So wie sich der Mensch das Geld als „leere“ Zusatzware für den effizienten Warenaustausch ausgedacht hat, so hat er sich die absolute Zeit als „leeres Zusatzgeschehen“ ausgedacht, um eine entsprechende *Komplexitätsreduktion* vorzunehmen.
Die absolute Zeit ist somit von den Veränderungen, die sie beschreibt, selbst vollkommen unabhängig. Technisch ließe sich die Zeigerstellung einer Hauptuhr durch starre Stangen und Hammerschläge oder unendlich schnelle Lichtsignale auf Nebenuhren an beliebigen Orten übertragen. Newton ging von diesen Möglichkeiten aus. Allen Ereignissen E wird so gegenüber der Hauptuhr eine *einzige* „kausale Tauschrelation“, nämlich der Zeitpunkt t_E zugeordnet und alle Ereignisse $\overline{E}$ mit $t_{\overline{E}} < t_E$ könnten E *prinzipiell* kausal beeinflussen.

Raum: Das Verständnis des *Raumes* setzt das Wissen voraus, *wie* sich ein Körper in diesem bewegt. Die griechische Antike ging vom „Ochsenkarrenprinzip" aus: Erlahmt der Ochse, so bleibt der Wagen stehen. Ohne Kraft verbleibt der Körper an *einem* Ort. Der Raum der Griechen umfasste daher alle möglichen *Orte*, es war also der dreidimensionale Ortsraum. Geschwindigkeit war damals keine selbstständige Größe, sie tendierte immer zu null.
Bis zur frühen Neuzeit galt dieses Weltbild und selbst Johannes Kepler (1571-1630) meinte noch, dass kleine Engelchen die Planeten schieben müssten, damit sie nicht liegen blieben.

Seit Galilei wissen wir, dass das Liegenbleiben auf der Reibung beruht und dass die Reibung durch perfekt polierte Flächen beliebig klein gemacht werden kann. Die Reibung verschleierte für 2000 Jahre die *tatsächliche* Hemmung, welche ein Körper dem Antrieb entgegensetzt. Diese Hemmung betrifft nämlich nicht das „Sein", also die Lage des Körpers, sondern sie betrifft das „Werden", d.h. seine Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit will bleiben wie sie ist und für *ihre* Änderung ist Kraft F erforderlich. Geschwindigkeitsänderung bedeutet Beschleunigung a. Es gilt: a ist proportional zu F, und nicht $v \sim F$.
Die Ortsänderung „reibt sich" an der Unebenheit der Straße. Poliert man sie, so ist die Reibung weg. Woran aber „reibt sich" die Geschwindigkeitsänderung? Ernst Mach (1838-1916) meinte, die Gravitationswirkung des *gesamten* Universums sei dafür verantwortlich. Das ist nicht widerlegt, doch heute werden andere Argumente, wie das Higgs Teilchen diskutiert.
Dass die Kraft an der *Geschwindigkeit* und *nicht* am *Ort* angreift, gehört zu den Wesensmerkmalen des neuzeitlichen Denkens.

Das neue Wissen über die Kraft wertet das „Werden", also die Geschwindigkeit, radikal auf: Das, was *jetzt* (zum Zeit*punkt t*) *ist*, ist nicht nur das anschauliche „Sein" im dreidimensionalen *Ortsraum*, das *Jetzt* beinhaltet *zusätzlich* und *gleichberechtigt* das unanschauliche „Werden", welches im, ebenfalls dreidimensionalen, *Geschwindigkeitsraum* erfolgt.
Das wahre Geschehen spielt sich somit in einem 3 + 3 = 6-dimensionalen Gesamtraum ab. Dieser sechsdimensionale Raum für das gemeinsame Sein&Werden heißt *Phasenraum*.

Dass das jeweilige *Jetzt* aus einem „diesseitigen" Sein *und* aus einem „jenseitigen" Werden besteht, war allen alten Kulturen bekannt, ja es war stets das Zentrum ihrer Mythen, Sagen und religiösen Vorstellungen. Aber diese Doppelnatur wurde halt nur in mythischer und religiöser Sprache zum Ausdruck gebracht. Erst der Neuzeit gelang es, Sein und Werden zu *einer* Einheit zu verschmelzen. Dafür musste man aber das ominöse „Werden" zu einem „Sein" „downgraden". Das gelang durch die Erfindung des Limesbegriffes, der irrationalen Zahlen und der Differentialrechnung: Zerstückelt man die Zeit bis ins *Unendliche*, $\Delta t = 1/n$ mit $n \to \infty$, so wird das „Werden" auf einem Zeit*punkt*" projiziert. Die Entwicklung *dieser* Gedanken erforderte mehr als zweitausend Jahre abendländischen Denkens. - Die Reibung war nämlich das geringste Problem. Die Verdopplung vom dreidimensionalen „Sein" auf das sechsdimensionale „Sein&Werden" bewirkte geradezu eine „Neuschöpfung der Welt".

Das Problem: Durch Grenzwertbildung und Nutzung der reellen Zahlen laufen die Masse*punkte* auf *lückenlos dichten*, unendlich „dünnen", streuungslosen Bahnen (Trajektorien). Durch diese „persönliche" Spur bekommt jeder Massepunkt eine Identität und ist, obwohl ansich „gesichtslos", von jedem anderen Massepunkt unterscheidbar. Der Massepunkt erfüllt also das Ideal der Individualität. Die Realität dieser Welt ist aber anders. Individualität entsteht erst durch Komplexität. Elementarteilchen, wie Elektronen, Photonen usw. haben keine „persönliche" Identität. Alle sind vollkommen identisch. Schließe ich die Augen und öffne sie wieder, haben sie mich genarrt wie zwei eineiige Zwillinge, denn vielleicht haben sie ihre Plätze vertauscht. Die Vertauschbarkeit der Elementarteilchen ist ein entscheidender Grund dafür, dass die klassische Verschmelzung von Ortraum und Impulsraum zum Phasenraum in der Mikrowelt falsch ist. Die Quantentheorie hat eine neue Verbindung zwischen Ort und Impuls (Geschwindigkeit) gefunden. Die maximale Gleichzeitigkeit von Ort und Impuls ist durch die Heisenbergschen Unschärfe-Relation $\Delta x \cdot \Delta p = h$ begrenzt.

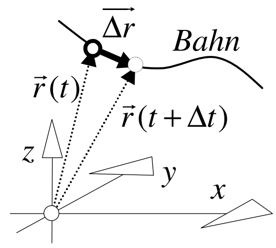
Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung im dreidimensionalen Raum

a) *Bahnkurve*: Zum Zeitpunkt t gilt $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$.

b) *Momentangeschwindigkeit*: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$

c) *Beschleunigung*: $\overrightarrow{a(t)} = \overrightarrow{\dot{v}(t)} = \overrightarrow{\ddot{r}(t)}$. Schlussfolgerungen:

1) Für $\vec{a}(t) \parallel \vec{v}(t)$ *bleibt* die Bahn *gerade*, nur die Geschwindigkeit längs dieser geraden Bahn ändert sich.
2) Schließen $\vec{a}(t)$ und $\vec{v}(t)$ einen Winkel $\neq 0°; \neq 180°$ ein, so krümmt sich die Bahn bei ev. gleichzeitiger Tempoänderung.
3) Für $\vec{a}(t) \perp \vec{v}(t)$ wird die Bahn bei *const*. Tempo *kreisförmig*.



Der Geschwindigkeitsvektor verläuft grundsätzlich *tangential* zur Bahnkurve.

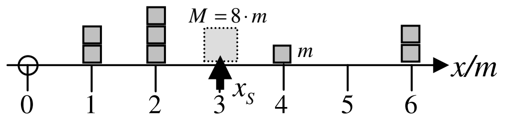
C) Massepunkt, Schwerpunkt

a) Der Massepunkt. Die Beschreibung des ausgedehnten Körpers ist kompliziert. Die stärkste Vereinfachung erreicht man durch das Konzept des Massepunktes (MP), welches durch den folgenden Schwerpunktsatz gerechtfertigt wird. Ist der Körper vergleichsweise klein, so ist ein einziger MP ausreichend. Andernfalls denkt man sich den Körper aus vielen MP's bzw. massebelegten Volumenelementen zusammengesetzt.

b) Schwerpunkt

Schreibt man in Tests die Noten 4, 2, 1, 6, 6, 2, 1 und 2, so erhält man als Mittelwert die Note $(4+2+1+6+6+2+1+2)/8 = 3$. Da „1“ und „6“ zweimal, „2“ dreimal und „4“ einmal vorkommt, kann man den Mittelwert auch als „anzahlgewichtetes Notenmittel“ schreiben: (**2**·1+**2**·6+**3**·2+**1**·4) / (**2**+**2**+**3**+**1**) = 3.

Entsprechend erhält man den Schwerpunkt als „massegewichtetes Koordinatenmittel“.



Beispiel der Massenverteilung:				
Masse in *kg*	2	2	3	1
Ort in m	1	6	2	4

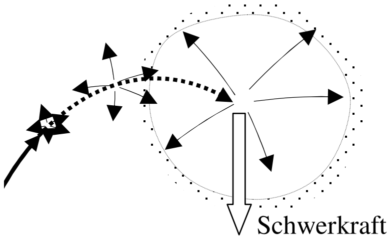
Ergebnis: Der Schwerpunkt liegt bei

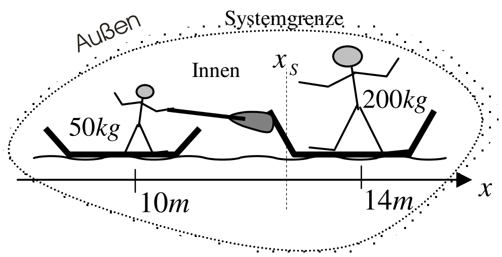
$$x_S = \frac{2kg \cdot 1m + 2kg \cdot 6m + 3kg \cdot 2m + 1kg \cdot 4m}{2kg + 2kg + 3kg + 1kg} = \underline{\underline{3m}}$$

Allgemein $\vec{x}_S = \dfrac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + \ldots + m_n \cdot \vec{r}_n}{m_1 + \ldots + m_n} = \dfrac{1}{M_{Ges}} \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \vec{r}_{k1}$. Ebenso für y und z.

> *Schwerpunktsatz*: Der Schwerpunkt eines Körpers bewegt sich so, als wäre seine gesamte Masse darin konzentriert *und* als griffe an ihm eine äußere Kraft an, die gleich der Summe *aller* einzelnen äußeren Kräfte ist. Innere Kräfte spielen *keine* Rolle. Beweis: s. Anh.
>
> Weil sich die Bewegung des ausgedehnten Körpers durch das Massepunktkonzept auf die Bewegung seines Schwerpunktes reduziert lässt, ist das MP-Konzept „selbstkonsistent“.

Beispiel 1)
Bei der explodierenden Silvesterrakete setzt der Schwerpunkt aller Bruchteile (ohne Luftrbg.) seine Bahn unter dem Einfluss der Schwerkraft fort.





Beispiel 2) Ein Junge stößt den Vater mit dem Paddel fort. Dabei erfährt der Junge, entsprechend dem Masseverhältnis, einen größeren Rückstoß, als der Vater weggestoßen wird. Der Schwerpunkt beider bleibt erhalten, weil keine äußere Kraft durch die Systemgrenze greift. Frage: Wo liegt x_S? Wo ist der Vater, wenn der Sohn auf 6m zurück geglitten ist?

D) Erstes Newtonsches Gesetz (Newton I) = Das Trägheitsgesetz von Galilei.

Der *Bewegung*szustand eines MP ist durch seine Momentan*geschwindigkeit* gegeben. Diese kann $v \neq 0$ oder auch $v = 0$ betragen. Das Trägheitsgesetz besagt, dass der Bewegungszustand beibehalten wird, wenn *keine* Kraft auf die Masse einwirkt. Beispiele: 1) Bin ich nicht angeschnallt, so fliege ich beim Bremsen des Autos nach vorn. In Wirklichkeit bewege ich mich weiter und die Windschutzscheibe kommt mir entgegen. 2) Bei der Kurvenfahrt werde ich nach außen gedrängt. In Wirklichkeit bewege ich mich *gradlinig* weiter und die Seitenwand des Autos schneidet mir den Weg ab. 3) Beim schnell anfahrenden Auto werde ich in den Sitz gedrückt. In Wirklichkeit bleibe ich in Ruhe und der Autositz drückt sich mir in den Rücken. 4) Beim seitlichen Erdbebenstoß erhält das Hochhaus einen Ruck. In Wirklichkeit bleibt das Hochhaus stehen und der Erdboden entzieht ihm das Fundament.

E) Das zweite Newtonsche Gesetz (Newton II)

Die alten Griechen dachten, dass Kraft Geschwindigkeit erzeugt (Ochsenkarrenprinzip). Ohne Reibung ist das aber *falsch*: Die Geschwindigkeit *bleibt* ohne Kraft *erhalten*. Wirkt eine Kraft, so entsteht Geschwindigkeits*änderung*, also *Beschleunigung* a (Acceleration).

Falsch: $\boxed{\cancel{\textit{Kraft } F = \text{Ursache}, \quad \textit{Geschwindigkeit } v = \text{Wirkung}}}$

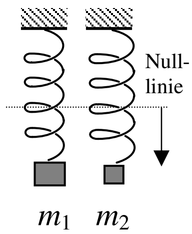
Richtig: $\boxed{\textit{Kraft } F = \text{Ursache}, \quad \textit{Beschleunigung } a = \text{Wirkung}}$

Nach Newton I gilt: $F = 0 \Rightarrow a = 0$ bzw. $v = const$

und umgekehrt: Ist $a = 0$ bzw. $v = const \Rightarrow F$ muss 0 gewesen sein.

Ist nun aber $F \neq 0$, so folgt zwangsläufig $a \neq 0$: Also: $F \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$.

Newton hat entdeckt, dass Kraft F und Beschleunigung a *proportional* sind und dass die Proportionalitätskonstante der Kehrwert der trägen Masse *m* ist.



a) Das zweite Newtonsche Gesetz in der Beschleunigungsform

$\boxed{a = \frac{1}{m} \cdot F}$. Bzw.: Aus a schließt man auf F zurück $\boxed{F = m \cdot a}$.

Beispiel: Zwei unterschiedliche Massen hängen an zwei gleichen gespannten Federn. Beim Loslassen beschleunigt die kleine Masse schneller und schwingt dann schneller.

b) Das zweite Newtonsche Gesetz in der Impulsform

Das Produkt m mal v fasst man zum *Impuls* zusammen $\boxed{p = m \cdot v}$. $\boxed{[p] = kg \cdot m/s}$

Der Impuls beschreibt das „Stoßvermögen" des Körpers: Bei gleicher Geschwindigkeit überträgt eine größere Masse einen größeren Stoß als eine kleine.

Bei konstanter Masse gilt $\dot{p} = (m \cdot v)^{\bullet} = m \cdot \dot{v} = m \cdot a$. Daraus folgt die Impulsform $\boxed{\dot{p} = F}$

Diese Form des Newtonschen Gesetzes ist sogar allgemeiner: Verringert z.B. eine Rakete durch den Düsenausstoß ihre Masse, so wird $F = m(t) \cdot a = m \cdot \dot{v}$ falsch, während die Form $F = \dot{p} = (m \cdot v)^{\bullet} = m \cdot \dot{v} + \dot{m} \cdot v$ gemäß der Produktregel der Diffrechng gültig bleibt.

c) Kraftstoß: Für kleines Δt folgt aus $\Delta p / \Delta t \approx F$ die *Kraftstoß*gleichung $\boxed{\Delta p \approx F \cdot \Delta t}$

d) Maßeinheit der Kraft: Die Schwerkraft einer Masse = *Gewicht* der Masse und die Spannkraft einer genormten Spiralfeder (Newtonmeter) wird im Alltag zur Kraftmessung genutzt. Doch ist das eine Verfahren ortsabhängig (Ortsfaktor *g*), das andere der Materialermüdung unterworfen. Daher muss Newtons $F = m \cdot a$ herangezogen werden:

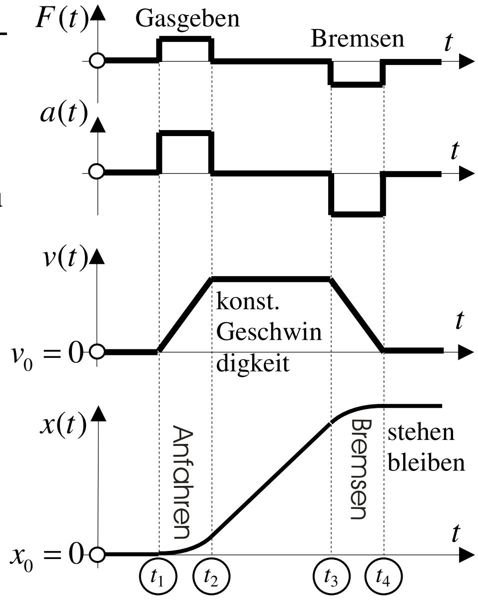
1 Newton ist diejenige Kraft, die einer Masse von 1 kg die Beschl. $a = 1 m/s^2$ erteilt.

Messpraxis: $1N$ ist diejenige Kraft, welche einer Masse von 1 kg während einer konstanten Wirkdauer von $1s$ die Geschwindigkeitszunahme $1m/s$ verleiht.

F) Lösung der Newton-Gleichung (von Newton II) mit Hilfe von Zeit-Diagrammen.

Wir betrachten jetzt die *ein*dimensionale Bewegung eines Autos mit $m = 500kg$ längs einer geraden Straße. Folgende Informationen sind zur Berechnung der Fahrt *erforderlich*:

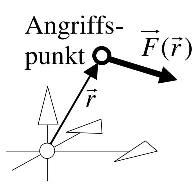
1) Der *Anfangszustand* des Autos muss bekannt sein.
   Von den *sechs* Zustandswerten bleiben jetzt *nur* zwei übrig.
   Beispiel: $x_0 = 0m$ für den Anfangsort und $v_0 = 0 m/s$ für die Anfangsgeschwindigkeit.
2) Der *Kraft*verlauf: Während einer gewissen Zeitspanne gibt der Fahrer Gas bzw. bremst. Während des Gasgebens bzw. Bremsens habe die Kraft die Werte $F = \pm 1000N$.
   Dadurch lässt sich das Kraftdiagramm $F(t)$ zeichnen.



   a) Die *Beschleunigung* $a(t)$ beträgt während des Gasgebens bzw. Bremsens $a = F/m = \pm 2 \ m/s^2$. Ansonsten gilt $a = 0$.
   b) *Geschwindigkeit* und Beschleunigung hängen über $a = \dot{v}(t)$ zusammen. Die v-Funktion ist daher so zu wählen, dass ihre Ableitung gleich $a(t)$ ist. Da die Ableitung von 0 auch 0 ergibt, bleibt v anfangs null. Beim Gasgeben muss $\dot{v}(t) = 2$ gelten. (ab jetzt lassen wir die Maßeinheiten in der Rechnung weg). Die richtige Funktion lautet $v(t) = 2 \cdot t$. Diese Gerade mit der Steigung 2 muss man jedoch im Zeitpunkt $t = t_1$ ansetzen.
      Zwischen t_2 und t_3 gilt $a = 0$. Die Geschwindigkeit bleibt jetzt auf ihrem Maximalwert v_{max}, den man leicht zeichnerisch ermitteln kann.
      Probe: Die Ableitung einer konstanten Zahl ist null. Während des Abbremsens muss die Ableitung der v-Funktion den Wert -2 liefern. Das ist für $v(t) = -2 \cdot t$ erfüllt.
      Diese fallende Gerade muss natürlich an den v_{max}-Wert in t_3 angesetzt werden. Anschließend gilt wieder $v = 0$, was als Ableitung auch wieder $a = 0$ ergibt.
   c) Der *Ort* und die Geschwindigkeit hängen über $v = \dot{x}(t)$ zusammen. Die x-Funktion ist daher so zu wählen, dass ihre Ableitung gleich $v(t)$ ist. Anfangs bleibt $x = 0$. Dann muss sich beim Ableiten $2 \cdot t$ ergeben. Das ist für $x = t^2$ der Fall. Also nimmt der Ort zwischen t_1 und t_2 wie eine Parabel zu. Dann muss die Ableitung v_{max} ergeben. Das ergibt die Gerade $x = v_{max} \cdot t$, denn deren Ableitung beträgt v_{max}. Anschließend ist ein Stück der Parabel $x = -t^2$ anzusetzen. Dann folgt der konstanter x-Wert, an dem das Auto stehen bleibt.

   Aufgabe: Konstruiere die Zeichnung für $t_1 = 2s,\ t_2 = 4s,\ t_3 = 10s,\ t_4 = 12s$ und ermittele die maximale Geschwindigkeit v_{max} und den Zielort x_{max}, den das Auto erreicht.

G) Kräfte



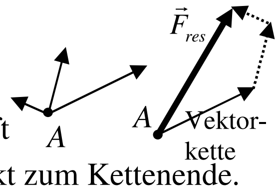
a) Kraftfeld. Über dem Erdboden wirkt die Schwerkraft an *jedem* Ort. Drücke ich einen Gegenstand mit der Fingerkuppe, so wirkt die Kraft ebenfalls an vielen Orten. Der gesamte Wirkungsbereich einer Kraft heißt *Kraftfeld*. Ein Kraftfeld hat viele *Angriffspunkte*. Für jeden Angriffspunkt muss der Kraftvektor mit seinen drei Komponenten angegeben werden. Deshalb braucht man für jeden Angriffspunkt *sechs* Zahlen: Drei für die Koordinaten des Angriffspunktes und drei für die Kraftkomponenten an der Angriffsstelle: $\vec{F}(\vec{r}) = \left(F_x(\vec{r}), F_y(\vec{r}), F_z(\vec{r})\right)$.

b) Mehrere Kräfte greifen am gleichen Angriffspunkt an.

Vektoraddition und Komponentenzerlegung sind *nur* bei *gleichem* Angriffspunkt erlaubt.

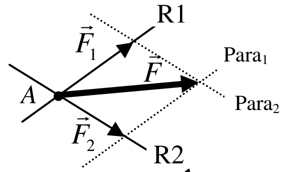
1) Addition von Kräften.

Greifen mehrere Kräfte an *einem* Angriffspunkt an, so lassen sich diese per Vektoraddition durch eine einzige *resultierende* Kraft $\vec{F}_{res}$ ersetzen. Zeichnerisch heftet man die Vektoren gemäß „Schaft an Spitze" zu einer Vektorkette. $\vec{F}_{res}$ zeigt dann vom Angriffspunkt zum Kettenende.

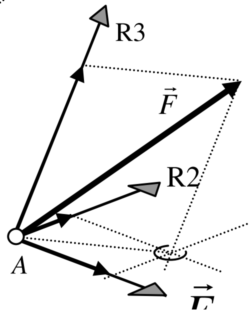


2) Komponentenzerlegung einer gegebenen Kraft.

Liegt die vorgegebene Kraft $\vec{F}$ in der Ebene zweier Wirkrichtungen, so lässt sie sich in zwei Komponenten zerlegen. Dazu zeichnet man Parallelen der beiden Richtungen durch die Spitze von $\vec{F}$ und projiziert dann auf die Richtungen.



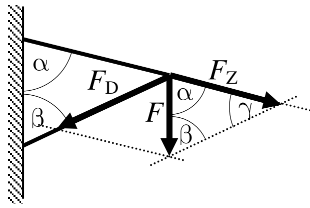
Zur Zerlegung von $\vec{F}$ längs drei Wirkrichtungen, zeichnet man zunächst *eine* der drei Wirkrichtungsparallelen durch die Spitze von $\vec{F}$ und ermittelt so den Durchstoßpunkt durch die von den beiden anderen Richtungen aufgespannte Ebene. Anschließend geht es wie im zweidimensionalen Fall weiter.



3) Beispiele

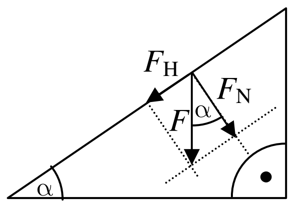
1) Zug- und Druckkraft einer Wandhalterung.

Unter den Winkeln α und β sind zwei Stäbe an die Wand montiert. An ihrer Verbindung hängt die Last *F*. Als Stufenwinkel übertragen sich α und β. Daraus ergibt sich $\gamma = 180° - \alpha - \beta$. Nach dem Sinussatz folgt dann für die Zugkraft am oberen Stab $F_Z = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \cdot F$ und für die Druckkraft am unteren $F_D = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot F$.



2) Schiefe Ebene.

Auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α liege eine Masse, welche die Gewichtskraft *F* erfährt. Da die Masse nicht eindringen kann, ist die Kraftkomponente $\boxed{F_N = F \cdot \cos\alpha}$ (Normalenkraft) senkrecht zum Untergrund wirkungslos. Nur die *Hangabtriebskraft* $\boxed{F_H = F \cdot \sin\alpha}$ bewirkt Beschleunigung längs der schiefen Ebene.



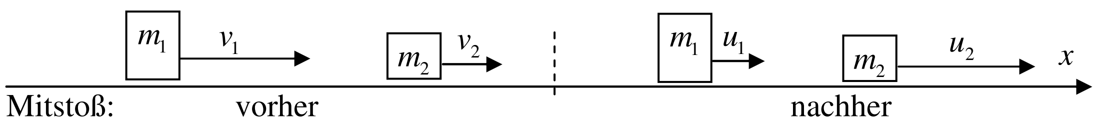
H) Das Dritte Newton'sche Gesetz (Newton III). Wie treten die Kräfte auf ?

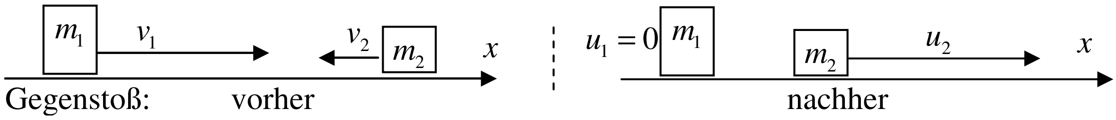
Antwort: Kräfte treten *immer paarweise* auf, eine Einzelkraft gibt es *nicht*.

Wirkt ein Körper₁ am Ort $\vec{r}_1$ mit der Kraft $\vec{F}_1(\vec{r}_2)$ auf einen Körper₂ am Ort $\vec{r}_2$, so wirkt der Körper₂ mit der Kraft $\vec{F}_2(\vec{r}_1) = -\vec{F}_1(\vec{r}_2)$ auf den Körper₁ zurück.

Das soll jetzt durch ein Stoßexperiment nachgewiesen werden. Durch die Luftkissenbahn wird die Reibung praktisch ausgeschaltet und die Wirkzeit der Kräfte wird (fast) auf einen Zeit*punkt* reduziert. Gemessen werden die Geschwindigk. vor und nach dem Stoß.

Beispiel: Einmal stößt die Masse m_1 gegen die gleich gerichtet laufende Masse m_2 (Mitstoß) und einmal laufen die Massen vor dem Stoß gegeneinander (Gegenstoß).



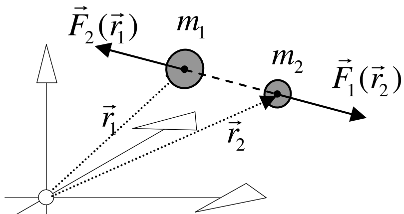


Das Geschehen lässt sich dann in einem Geschwindigkeitsdiagramm auswerten. Mit $m_1 = 0,3\,kg$ und $m_2 = 0,2\,kg$ ergaben sich z.B. bei einem „Mitstoß“ weiter gleiche Richtungen. Beim Gegenstoß blieb der linke Körper liegen und der rechte kehrt sich um.
Alle Geschwindigkeiten sind in *m/s* und alle Impulse $kg \cdot m/s$ zu nehmen.

	Versuch 1: „Mitstoß“				Versuch 2: „Gegenstoß“			
Vor dem Stoß	v_1	1,25	v_2	0,5	v_1	1	v_2	-0,25
	p_1	0,375	p_2	0,1	p_1	0,3	p_2	-0,05
Nach dem Stoß	u_1	0,65	u_2	1,4	u_1	0	u_2	1,25
	$\overline{p}_1$	0,195	$\overline{p}_2$	0,28	$\overline{p}_1$	0	$\overline{p}_2$	0,25
	$\Delta p_1 = \overline{p}_1 - p_1$	-0,18	$\Delta p_2 = \overline{p}_2 - p_2$	0,18	$\Delta p_1 = \overline{p}_1 - p_1$	-0,3	$\Delta p_2 = \overline{p}_2 - p_2$	0,3

<u>Ergebnis</u>: $\Delta p_2 = \overline{p}_2 - p_2$ ist stets gleich dem *Negativen* von $\Delta p_1 = \overline{p}_1 - p_1$, also $\boxed{\Delta p_1 = -\Delta p_2}$
Aus den Kraftstoßformeln $\Delta p_1 = \Delta t \cdot F_2(x_1)$ und $\Delta p_2 = \Delta t \cdot F_1(x_2)$ folgt dann wegen gleicher Einwirkzeiten Δt die Formel $F_1(x_2) = -F_2(x_1)$. D.h.: Die gegenseitigen Kräfte sind umgekehrt gerichtet gleich groß (gegengleich). Das gilt auch im räumlichen Fall:
Die gegenseitigen Kräfte sind betragsmäßig gleich groß und wirken längs der Verbindungslinie in *entgegen*gesetzter Richtung.

$$\boxed{\vec{F}_1(\vec{r}_2) = -\,\vec{F}_2(\vec{r}_1)\ ,\ \text{Drittes Newtonsches Gesetz}}$$



Die Körper im Moment des Zusammenstoßes.

Drittes Newtonsches Gesetz: **Actio = Reactio**.
<u>Ergebnis</u>: **Kräfte treten grundsätzlich paarweise auf**.
Es gibt kein Kraft**monopol**.
Die **Gegenwirkung is**t nicht **tilgbar**.

Würden $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ dem Betrage nach verschieden sein, so würde sich das Körperpaar von *alleine* in Bewegung setzen. Würden sie *nicht* längs der Verbindungslinie wirken, so würde das Körperpaar von *allein* in Rotation geraten. Beides wurde nie beobachtet.

Ersetzt man den mechanischen Stoß durch einen „magnetischen“ und lässt zwei gleichnamige Magnetpole aufeinander prallen, so übertragen sich die Kräfte per *Fernwirkung*. Das Ergebnis bleibt dasselbe. Auch brauchen die Kräfte nicht abstoßend zu sein. Erde und Mond ziehen sich durch Gravitationsfernwirkung *an* und es gilt $F_E(M) = -F_M(E)$.

<u>Beispiele</u>:
1) Löst sich ein Apfel vom Baum, so zieht die Erde ihn herab, aber der Apfel zieht die Erde entsprechend *gleich* stark zu sich empor. Nur zeigt diese Hubkraft bei der Erde mit ihrer riesigen trägen Masse kaum Wirkung.
2) Ohne Newtonsche III, könnte sich keine Rakete im Weltraum beschleunigen: Die Rakete stößt nach hinten Gaspartikel aus. Die Partikel erfaren an *ihrem* Ort eine Kraft *von* der Rakete nach hinten und die Rakete erfährt an *ihrem* Ort eine entspr. Kraft nach vorn.
3) Ebenso schießt ein Ruderboot vom Ufer in das Wasser weg, wenn man nach hinten aus dem Boot an Land springt.
4) Erstaunlicherweise erfolgt auch die ganz normale Fortbewegung zu Fuß oder mit dem Rad nach dem „Raketenprinzip“: Der Fuß drückt sich am Boden ab, er stößt jetzt nicht Gaspartikel, sondern die gesamte Erde nach hinten (wovon die allerdings fast nichts merkt), entsprechend drückt der Erdball den Fuß nach vorn. Ebenso dreht sich der Medi-

zinball nach hinten, wenn der Akrobat darauf vorwärts läuft. Auf Glatteis ist die gegenseitige Kraftübertragung stark gemindert, so dass dort fast kein Vorankommen ist.

5) Seilziehen: Ein schwerer und ein leichter Mann ziehen an den Enden eines Seiles. Auch selbst bei ungleicher Bodenhaftung übertragen beide *gegengleiche* Kräfte aufeinander. Doch die Wirkung dieser Kräfte ist unterschiedlich: Steht der schwere Mann z.B. auf Eis und der Leichte auf haftendem Untergrund, so wird der Leichte das Seilziehen gewinnen, auch wenn der Schwere noch so zieht, er zieht sich nur selbst zum Leichten hin, denn dieser kann die auf ihn wirkende Kraft auf den Boden übertragen, während die gegengleiche Kraft auf den Schweren beschleunigend wirkt.

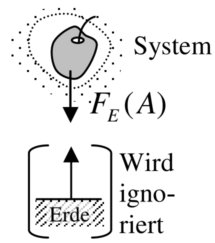
c) *Fernwirkung* der Kräfte

Newton (1642-1724) führte die Fernübertragung (Fernwirkung) im Rahmen seiner Gravitationstheorie aus *Not* ein: Die Schwerkraft der Erde wirke unvermittelt und unmittelbar am Angriffspunkt des Mondes und umgekehrt. Ihm gefiel dieser (unlogische) Gedanke selber nicht. Da er sich aber keinen Übertragungsmechanismus vorstellen konnte, sah er keine andere Möglichkeit. - Die Feldtheorie war noch nicht erfunden.

I) Das Physikalische System: *Innere* und *äußere* Kräfte.

Beispiel: Wenn sich ein Apfel der Masse $m_A = 100g$ vom Zweig löst, so erfährt er *von* der Erde die Schwerkraft $F_G = m_A \cdot g = 0{,}981N$ und fällt auf Grund dessen mit der Beschleunigung $a_A = F_G / m_A = \cancel{m_A} \cdot g / \cancel{m_A} = g = \underline{\underline{9{,}81 m/s^2}}$ auf diese zu.

Die Erde erfährt zwar die gegen*gleiche* Kraft $-F_G = -0{,}981N$, doch ihre Beschleunigung ist gering, denn mit $m_E = 5{,}97 \cdot 10^{24} kg$ folgt $a_E = F_G / m_E = -0{,}981N \;/\; 5{,}97 \cdot 10^{24} kg = \underline{\underline{-1{,}6 \cdot 10^{-25} m/s^2}}$.



Da die Wirkung der ansich *gleichgroßen* Gegenkraft, welche der Apfel auf die Erde ausübt, fast null ist, *ignoriert* man die Gegenkraft und grenzt den Apfel *gedanklich* von der Erde ab.

Den *willkürlich* abgegrenzten Teil des Ganzen nennt man ein „Physikalisches System“.

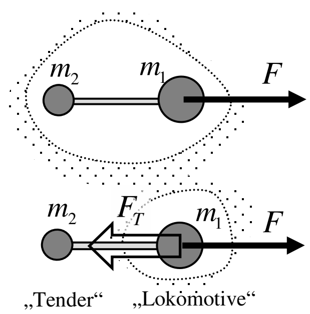
Durch Auswahl, Abgrenzung und Ignorieren des Anderen, *scheint* für das Physikalische System eine Kraft *ohne* Gegenkraft zu existieren, welche durch die Systemgrenze greift.

Durch die begründete, aber dennoch willkürlich Definition des physikalischen Systems ergibt sich die Unterscheidung zwischen *inneren* und *äußeren* Kräften:

Innere Kräfte haben ihren Ausgangspunkt *und* Angriffspunkt *innerhalb* des Systems.
Äußere Kräfte *durchstoßen* die Systemgrenze.

J) Trägheitskraft

Ein System bestehe aus einer Hantel mit den Massen m_1 und m_2, sowie einer starren, „masselosen“ Verbindungsstange. Die Kraft F greife durch die Systemgrenze an m_1 an, sodass m_2 durch die Stange mitgenommen wird. Die Beschleunigung a der Hantel ergibt sich dann aus $(m_1 + m_2) \cdot a = F$.



Nun wird die Systemgrenze *willkürlich* geändert und nur m_1 als System angesehen. Durch Umstellung erhält man eine Newtongleichung für m_1 *allein*: $m_1 \cdot a = F - m_2 \cdot a$.

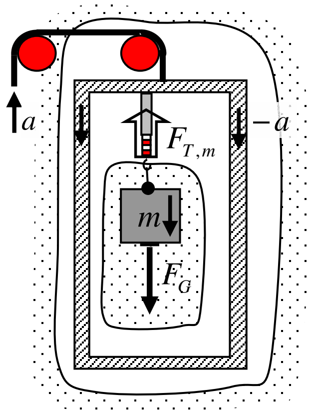
Interpretation:

An m_1 greift außer F nun *zusätzlich* die fiktive äußere Kraft $F_{T,m2}(1) = -m_2 \cdot a$ an.

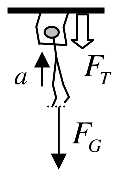
$F_{T,m2} = -m_2 \cdot a$ heißt *Trägheitskraft* von m_2. Sie tritt *nur* bei *Beschleunigung* auf.

Die Masse m_1 ist hier „Lokomotive", während m_2 der mitgeschleppte träge „Tender" ist.

Beispiel 1) *Kraft auf eine Masse im nach unten beschleunigten Fahrstuhl.*
An der Decke eines mit -*a* (nach unten) beschleunigten Fahrstuhls ist die Masse *m* befestigt. Das System bestehe *nur* aus dem Fahrstuhl *ohne* die Masse. Daher muss der Fahrstuhl die Masse *m* mit nach *unten* beschleunigen und erfährt so von *ihr* die Trägheitskraft $F_{T,m} = m \cdot a$ nach *oben*. Dieser Kraft überlagert sich jedoch die Schwerkraft $F_G = -m \cdot g$, welche *m* erfährt, sodass das Newtonmeter an der Decke die Kraft $F = -m \cdot g + m \cdot a$ anzeigt. m erscheint daher leichter. Im *Fallturm* mit $a = g$ ist m sogar „schwerelos" relativ zur Kapselwand. Auch im schiefen reibungsfreien Wurf, sowie in einer umlaufenden Raumkapsel heben sich Gravitation und Scheinkraft (hier Zentrifugalkraft) auf, sodass „Schwerelosigkeit" herrscht.



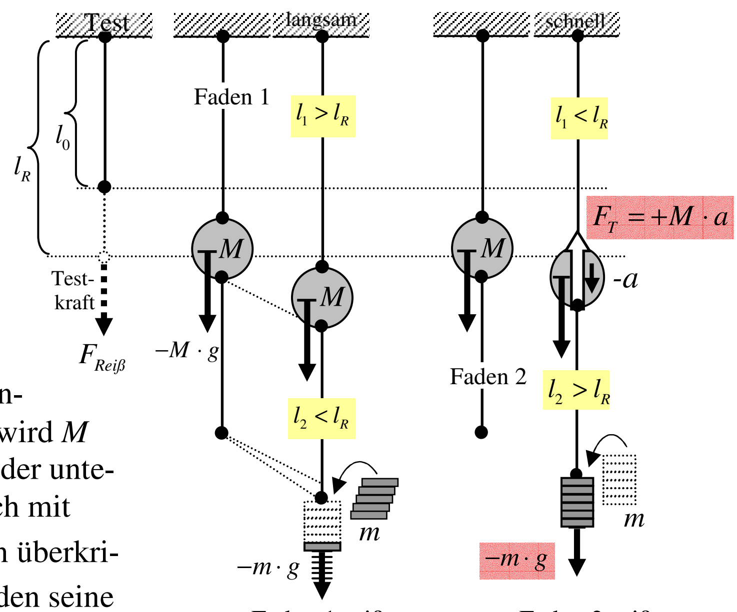
Beispiel 2) *Klimmzug*. Während der $\approx 0{,}1\,s$ Sekunden des Anzugs *beschleunigt* der Körper und die Reckstange muss außer der Gewichtkraft $F_G = -m \cdot g$ noch die Trägheitskraft $F_T = -m \cdot a$ aufnehmen. Während des gleichförmigen Hochziehens entfällt F_T.



Beispiel 3) *Welcher Faden reißt?*

Eine Masse hängt an einem Faden ohne dass er reißt. Unter die Masse wird ein zweiter, gleichartiger Faden gebunden. Zieht man an diesem *langsam*, so reißt der obere Faden. Zieht man *schnell*, so reißt der untere Faden. Das liegt an der Trägheitskraft der Masse.

Begründung: Ein Vortest weist nach, dass die Fäden (l_0) bei Dehnung auf l_R unter der Kraft F_R reißen. Die Gewichtskraft von *M* reicht dafür nicht. Der langsame Zug wird durch schrittweises Auflegen von Teilmassen von *m* simuliert. Am unteren Faden zieht dann nur die unterkritische Kraft $-m \cdot g$, während oben Überlastung eintritt. Wirft man *m* auf einmal auf, so wird *M* merklich mit -*a* beschleunigt, sodass der untere Faden außer durch $-m \cdot g$ zusätzlich mit $F_T = +M \cdot a$ gespannt wird. Das kann überkritisch werden. Dabei hat der obere Faden seine Risslänge l_R noch nicht unbedingt erreicht.

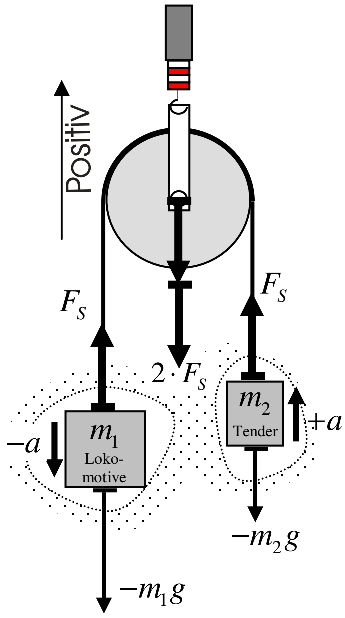


Faden 1 reißt. Faden 2 reißt.

Hier wurden nur die Beträge der Kräfte angegeben.

Beispiel 4): *Atwoodsche Fallmaschine*.

Über einer festen, „masselosen“ Rolle hängen an einem dehnungslosen Seil die Massen m_1 und $m_2 \le m_1$. Wir betrachten diese jeweils als eigene Systeme. Dadurch entfällt die Trägheitskraft und die Seilkraft (Seilspannung) F_S wird berechenbar. Diese beinhaltet *alles*, was nach *oben* zieht. Unter Beachtung der Vorzeichen der Beschleunigung ergibt sich:



System I) $\quad m_1 \cdot (-a) = -m_1 \cdot g + F_S$

System II) $\quad m_2 \cdot a = -m_2 \cdot g + F_S$

I)–II) $-m_1 \cdot a - m_2 \cdot a = -m_1 \cdot g + m_2 \cdot g$ bzw. $\underline{\underline{a = \dfrac{(m_1 - m_2) \cdot g}{m_1 + m_2}}}$

Die Seilkraft F_S erhält man z.B. aus I) $F_S = m_1 \cdot g - m_1 \cdot a$ zu

$$F_S = m_1 \cdot g - m_1 \cdot \frac{(m_1 - m_2) \cdot g}{m_1 + m_2} = m_1 \cdot g \cdot \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) =$$

$$= m_1 \cdot g \cdot \left(\frac{\cancel{m_1} + m_2 - \cancel{m_1} + m_2}{m_1 + m_2}\right) = \underline{\underline{\frac{2 m_1 \cdot m_2 \cdot g}{m_1 + m_2}}}$$

Die Aufhängung erfährt dadurch die Kraft $F_{ges} = -2 \cdot \dfrac{2 \cdot m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g = -\dfrac{4 \cdot m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$.

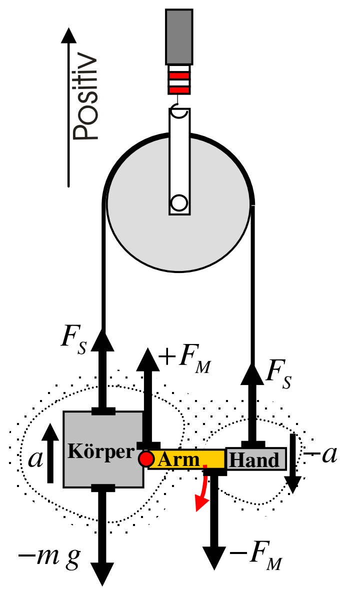
Für $m_2 = m_1 = m$ ist $a = 0$. Die Rolle steht still *oder* dreht sich gleichförmig. Die Aufhängung trägt dann die volle Gewichtskraft beider Massen $F_{ges} = -\dfrac{4 m \cdot m}{m + m} \cdot g = -2 \cdot m \cdot g$.

Für $m_2 \to 0$ ergibt sich $a = \dfrac{(m_1 - m_2) \cdot g}{m_1 + m_2} = \dfrac{(m_1 - 0) \cdot g}{m_1 + 0} = g$ und $F_{Ges} = -\dfrac{4 m_1 \cdot 0}{m_1 + 0} \cdot g = 0$.

m_1 saust im freien Fall nach unten, man braucht *nichts* zu halten.

Anwendung 1: Eine Person der Masse m_1 kann jemanden anderes der Masse m_2 über eine feste Rolle empor ziehen, wenn $m_1 > m_2$ gilt.

Anwendung 2: Kann ich mich selbst mit der Muskelkraft F_M des Armes über eine Rolle empor ziehen? Mein Körper hat die Masse *m*, die Massen von Hand $m_H \approx 0$ und Arm werden vernachlässigt. Körper und Hand erfahren dann zusätzlich wegen Newton III die Muskelkraft $+F_M$ bzw. $-F_M$. Der Körper bewegt sich jetzt nach oben. Die Gleichungen I) und II) lauten dann



I) $\quad m \cdot a = -m \cdot g + F_S + F_M$

II) $\quad m_H \cdot (-a) = -m_H \cdot g + F_S - F_M$ bzw. wegen $m_H \approx 0$

II) $\quad F_S = F_M$

damit folgt $m \cdot a = -m \cdot g + 2 \cdot F_M$. Ich komme gerade empor, wenn a minimal größer null ist. Einsetzen von $a = 0$ ergibt $F_M = ½ \cdot m_1 \cdot g$.

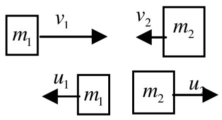
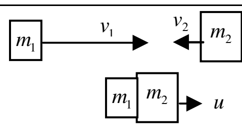
Ergebnis: Mit der Kraft des *halben* Körpergewichtes kann ich mich über die feste Rolle empor ziehen. Das erinnert an den Flaschenzug, der allerdings bei halber Kraft eine *lose* Rolle benötigt.

K) Elastischer Stoß und inelastische Stoß. Impuls, Energie, Erhaltungssätze. (S. Anh.2)

Der Stoß zweier reibungsfreier Massen stellt das *erste Kollisionsexperiment* der Physik dar. Die Resultate führten uns bereits zum 3. Newtonschen Gesetz.
Kollisionsexperimente sind bis heute entscheidend in der physikalischen Forschung (siehe CERN). Stoßversuche reibungsfreier Massen sind deshalb so interessant, weil bei ihnen *nur* die *Transformation* der Geschwindigkeiten, also des „*Werdens*“ relevant ist. Das „Werden“ enthält aber viel größere Geheimnisse als das „Sein“. Wir gewinnen zwei fundamental neue physikalische Größen, den *Impuls* und die *Energie*, sowie deren Erhaltungssätze. Während der Impuls anschaulich ist (s. oben), hat man für die Energie keinerlei Alltagsvorstellung.
Experimentell führt man den Stoß mit zwei Gleitwagen auf der Luftkissenbahn durch. Gemessen werden die Geschwindigkeiten v_1, v_2 vor und u_1, u_2 nach dem Stoß. Die Transformationsformel findet man durch die graphische Darstellung der Messergebnisse im Geschwindigkeitsdiagramm (siehe Anh. 2), denn *nur* hier erkennt man die Systematik und nur hier kann man Messfehler eliminieren und Mittelung vornehmen. Nun fragt man, ob ein linearer bzw. quadratischer Ausdruck der Form $c_1v_1 + c_2v_2$ bzw. $c_1v_1^2 + c_2v_2^2$, mit festen Zahlen c_1, c_2 existiert, welcher beim Stoß *erhalten* bleibt, also für den $c_1v_1 + c_2v_2 = c_1u_1 + c_2u_2$ bzw. $c_1v_1^2 + c_2v_2^2 = c_1u_1^2 + c_2u_2^2$ gilt. Man wird fündig und erhält erstens den *Impuls* $p = m_1v_1 + m_2v_2$ als Erhaltungsgröße *sowohl* beim elastischen als auch beim inelastischen Stoß und die *kinetische Energie* $W = ½ m_1v_1^2 + ½ m_2v_2^2$ *nur* beim elastischen Stoß. Durchführung s. Anhang 2)

Neue Größen: **Impuls** (= Stoßvermögen) einer Masse: $\boxed{p = m \cdot v}$

Kinetische Energie eine Masse: $\boxed{W = ½ m \cdot v^2}$

Zusammenfassung	Elastischer Stoß	Inelastischer Stoß
Skizze	vorher  nachher	vorher  nachher
Geschwindigkeits-transformationen	$\boxed{u_1 = \frac{(m_1 - m_2)\cdot v_1 + 2m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}}$ $\boxed{u_2 = \frac{2m_1 \cdot v_1 + (m_2 - m_1)\cdot v_2}{m_1 + m_2}}$	$\boxed{u_1 = u_2 = u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}}$
Erhaltungsgröße: Impuls **Impulserhaltungssatz**	$p_{vor} = m_1v_1 + m_2v_2$ $p_{nach} = m_1u_1 + m_2u_2$ $\boxed{p_{nach} = p_{vor}}$ ✓	$p_{vor} = m_1v_1 + m_2v_2$ $p_{nach} = m_1u_1 + m_2u_2$ $\boxed{p_{nach} = p_{vor}}$ ✓
Erhaltungsgröße: Kinetische Energie **Energieerhaltungssatz**	$W_{vor} = ½ m_1v_1^2 + ½ m_2v_2^2$ $W_{nach} = ½ m_1u_1^2 + ½ m_2u_2^2$ $\boxed{W_{nach} = W_{vor}}$ ✓	$W_{vor} = ½ m_1v_1^2 + ½ m_2v_2^2$ $W_{nach} = ½ m_1u_1^2 + ½ m_2u_2^2$ $\boxed{W_{nach} \neq W_{vor}}$ **nicht !** $\Delta W = -\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\cdot(v_2 - v_1)^2$

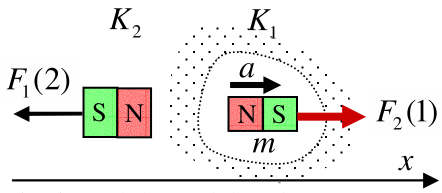
Bemerkung zum <u>inelastischen</u> Stoß:

1) Für z.B. $m_1 \ll m_2$ merkt der „Mehlsack“ nichts von der „Kugel“: $m_1 \to 0 \Rightarrow \underline{\Delta W \to 0}$.

2) Für festes $\Delta v = v_2 - v_1$ ist ΔW für $m_1 = m_2 = m$ maximal: $\underline{\underline{\Delta W_{\max} = -¼\, m \cdot \Delta v^2}}$.

L) Arbeit: Beschleunigungsarbeit: Die äußere Kraft überwindet die Trägheitskraft.

Beim elastischen Stoß umfasste die Systemgrenze *beide* Stoßpartner. Weil keine Außenkräfte wirkten, war das System abgeschlossen und es galt der Energieerhaltungssatz. Nun wählen wir als System *nur* den rechten Körper $m_1 = m$ *allein*. Während des Stoßvorganges (der durch die Verwendung abstoßender Magnete zeitlich aufgespreizt sein soll), wirkt die Kraft $F_2(1)$ von Körper K_2 auf Körper K_1. Dadurch erfährt dieser Körper die Beschleunigung $\boxed{a = F_2(1)/m}$.



Situation nach dem Umkehrpunkt.
Die „Stoßdauer" wird durch Magnete gespreizt.

Frage: Wieviel *Energie* wird während Δt durch die Kraft $F_2(1)$ auf K_1 übertragen?

Ist die Zeitspanne Δt sehr klein, so erhöht sich die Geschwindigkeit von K_1 von v auf $v+\Delta v$ auch nur geringfügig. Die kinetische Energie wächst dadurch von $W_{kin}(t) = \frac{1}{2} m v^2$ auf den Wert $W_{kin}(t+\Delta t) = \frac{1}{2} m (v+\Delta v)^2$ an. Deshalb beträgt der Energie*zuwachs*

$$\Delta W_{kin} = \tfrac{1}{2} m (v+\Delta v)^2 - \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m \cdot \left(\cancel{v^2} + 2v\cdot\Delta v + (\Delta v)^2 - \cancel{v^2}\right) \approx \tfrac{1}{2} m \cdot 2v \cdot \Delta v = m\cdot v\cdot \Delta v\,.$$

Weil $2v\cdot\Delta v \gg (\Delta v)^2$ konnte der Term $(\Delta v)^2$ vergleichsweise vernachlässigt werden.

Umformung: $\Delta W_{kin} = m\cdot \underbrace{v}_{\Delta x/\Delta t}\cdot \Delta v = m\cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta v}{1} = m\cdot\frac{\Delta x}{1}\cdot\underbrace{\frac{\Delta v}{\Delta t}}_{a} = m\cdot\Delta x\cdot a = \underbrace{m\cdot a}_{F_2(1)}\cdot \Delta x = \underline{\underline{F_2(1)\cdot\Delta x}}\,.$

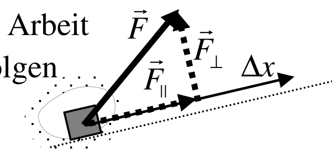
Antwort: Durchstößt die *äußere* Kraft $F_2(1)$ die Systemgrenze *und* verschiebt K_1 dabei um die *innere* Wegstrecke Δx, so wird auf K_1 die Energie $\boxed{\Delta W_{kin} = F_2(1)\cdot\Delta x}$ übertragen.

Neuer Begriff: Die *durch* die *Systemgrenze* übertragene Energie heißt *Arbeit* ΔW.

Verallgemeinerung: Arbeit = Kraft$_{\text{von außen}}$ • Weg$_{\text{innen}}$ bzw. $\boxed{\Delta W = F_{außen}\cdot\Delta x_{innen}}$.

Auf Grund von *Zwangsbedingungen* (Schiene), kann ein Körper ggf. *nicht* der antreibenden Kraft folgen. Dann wird nur $\Delta W = F_{\parallel}\cdot\Delta x$ übertragen, während $\vec{F}_{\perp}$ die Schiene verformt.

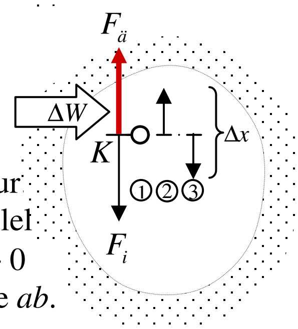
Schlussfolgerung: Unter der Zwangsbedingung $\vec{F}\perp\Delta\vec{x}$ kann *keine* Arbeit verrichtet werden. D.h., wenn das System der äußeren Kraft *nicht* folgen kann, kann *keine* Energie von außen nach innen übertragen werden.



M) Arbeit zur Überwindung anderer Kräfte

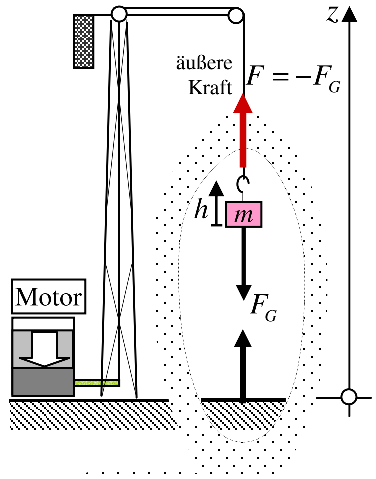
Innerhalb eines phys. Systems wirke eine *innere* Kraft F_i auf einen Körper K. Kompensiert man diese Kraft nun durch eine *äußere* Kraft $\boxed{F_ä = -F_i}$, so wird K stillstehen oder sich kräftefrei bewegen.

Nun kommt es darauf an, *wie* man K bewegt. Im Fall ① hält man K nur fest und mit $\Delta x = 0$ ist auch $\Delta W = 0$. In Fall ② bzw. ③ wird K parallel bzw. antiparallel zu $F_ä$ geführt. Dann ist die zugeführte Energie $\Delta W > 0$ bzw. $\Delta W < 0$ und das System *nimmt* Energie *auf* bzw. es *gibt* Energie *ab*.

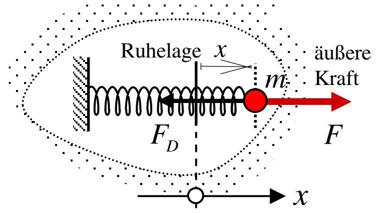


a) Die äußere Kraft überwindet die Schwerkraft.
Das System bestehe jetzt aus der Masse m *und* der Erde, in deren Schwerefeld m die Schwerkraft $F_i = F_G = -m\cdot g$ nach unten erfährt. Diese Kraft muss durch $F = F_ä$ kompensiert werden, damit m zunächst still steht. Wäre $|F|$ deutlich größer als $|F_G|$, so würde m zusätzlich beschleunigt, was hier nicht der Fall sein *soll*. Daher fordern wir $F_ä = F = -F_G = +m\cdot g$. Die vom Motor *durch* die Systemgrenze übertragene Energie =

= *Arbeit* hat dann, bei einer Verschiebung von m um die Wegstrecke h, den Wert $\Delta W = F_{ä} \cdot h = +m \cdot g \cdot h$.
Für $h > 0$ gilt $\Delta W > 0$ und das System *gewinnt* Energie, welche als <u>potentielle</u> Energie *gespeichert* wird. Ist $h < 0$, so wird die Masse abgesenkt und das System „gewinnt" negative pot. Energie. Allgemein: $\boxed{\Delta W_{pot,G} = m \cdot g \cdot h}$.

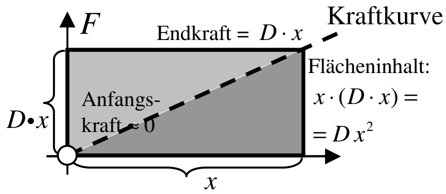


b) <u>Die äußere Kraft überwindet die Hookesche Federkraft.</u>
Das System besteht jetzt aus einer Feder mit Federkonstante *D*, der Wandhalterung, an welcher sich die äußere Kraft F abdrückt und der Masse *m*. Bei langsamem Ausziehen ist die Trägheit von *m* wieder vernachlässigbar und *F* muss nur die rücktreibende Federkraft $F_D = -D \cdot x$ kompensieren. Daher ist die erforderliche äußere Kraft $F(x) = +D \cdot x$ eine lineare *Funktion* von *x*. Zur Berechnung der Arbeit W stellen wir $\Delta W = F \cdot \Delta x$ nach *F* um, bilden den Grenzwert $\Delta x \to 0$ und erhalten mit $F(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta W / \Delta x = W'(x)$ die Erkenntnis, dass



$\boxed{\text{Äußere Kraft = 1. Ableitung der verrichteten Arbeit bzgl. } x.}$ Formel: $\boxed{F(x) = +W'(x)}$.
Für $W(x)$ muss also eine Funktion gesucht werden, deren Ableitung $F(x) = D \cdot x$ ergibt. Das ist aber gerade $W(x) = ½\, D \cdot x^2$. Die verrichtete Arbeit wird jetzt als *potentielle* Energie der Elastizität gespeichert. $\boxed{W_{pot,D} = ½\, D \cdot x^2}$

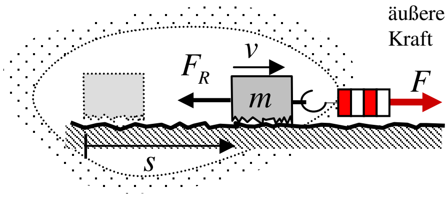
Das Ergebnis erhält man auch graphisch mit Hilfe des *Arbeitsdiagramms* *Kraft* F = Funktion (*Auslenkung* x). Die verrichtete Arbeit ist dort nämlich gleich dem *Flächeninhalt* unter der Kraftkurve. Das gesamte Rechteck hat den Flächeninhalt Länge×Breite $= x \cdot (D \cdot x) = D\,x^2$, woraus $W(x) = ½\, D \cdot x^2$ folgt.



Anfangs ist die Kraft $F = 0$ und am Ende der Dehnung gilt $F = D \cdot x$. Der Kraftmittelwert $½\, D \cdot x$ mal die volle Auszugslänge *x* ergibt somit wieder $W(x) = ½\, D \cdot x^2$.

c) <u>Die äußere Kraft überwindet die Reibungskraft. ($a = 0$)</u>
Die Reibungskraft ist i.A. geschwindigkeitsabhängig und die verrichtete Arbeit zu ihrer Überwindung wird *nicht* als potentielle Energie gespeichert, sondern als *Wärme* an die Umgebung abgegeben. Es gibt viele Reibungsarten und die Gesetzmäßigkeiten lassen sich nur in einfachen Fällen herleiten, meist muss das Experiment herangezogen werden. Hier soll nur die **Gleitreibung** angesprochen werden. Sie ist …
1) *proportional* zur einer Gleitreibungszahl f, welche durch die Rauhigkeit der beiden „verzahnten" Materialien bedingt ist.
2) *proportional* zur Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$, weil diese für die „Verzahnungstiefe" verantwortlich ist.
3) <u>*unabhängig*</u> von der *Größe* der reibenden Fläche, weil eine geringere Anzahl von „Zähnen" bei kleinerer Auflagefläche durch größeren Druck und damit größere „Verzahnungstiefe" kompensiert wird.
4) <u>*unabhängig*</u> von der *Geschwindigkeit*, weil die „Zähnchen" sich bei höherer Geschwindigkeit zwar flacher verzahnen, dafür aber mehr Zähnchen pro Zeiteinheit übereinander hinweg gleiten müssen.
5) Ergebnis: $F_R = -f \cdot F_G$ bzw. $\boxed{F_R = -f \cdot F_N = -f \cdot F_G \cdot \cos\alpha}$ bei Neigungswinkel α.

6) Die äußere Kraft $F = -F_R$ muss F_R kompensieren Dem reibenden Klotz wird somit die Reibungsarbeit $W_R = f \cdot F_G \cdot s$ zugeführt. Die zugeführte Energie verwandelt sich in Wärme $Q = f \cdot m \cdot g \cdot s$.



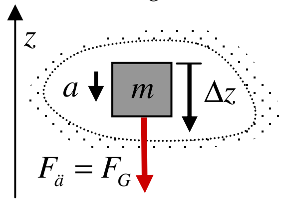
N) Allgemeiner Energieerhaltungssatz

Wenn die zugeführte Arbeit W vom System als *kinetische* oder *potentielle* Energie aufgenommen, so steht sie für weitere Umwandlungen zur Verfügung. In diesem Falle gilt der Allgemeine Energieerhaltungssatz.

a) Beim <u>elastischen Stoß</u> wird kinetische Energie zwischen den Stoßpartnern ausgetauscht, die Summe der kinetischen Energien bleibt erhalten: $\boxed{W_{kin,1} + W_{kin,2} = W_{Ges} = konst}$

b) <u>Freie Masse im Schwerefeld.</u>

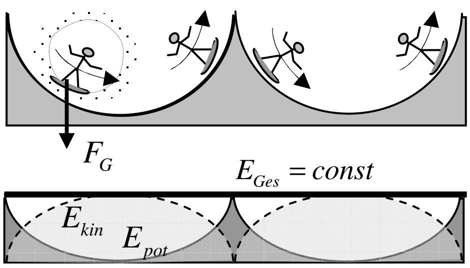
Als System betrachten wir nun die *freie* Masse m, an welche die Schwerkraft $F_G = -m \cdot g$ der Erde angreift. Fällt m um Δz, so vergrößert sich W_{kin} um $\Delta W_{kin} = m \cdot a \cdot \Delta z$ (s. S.14). Mit $m \cdot a = F = F_G = -m \cdot g$ wird daraus $\Delta W_{kin} = -m \cdot g \cdot \Delta z$. Da aber $m \cdot g \cdot \Delta z = \Delta W_{pot}$ (s.S.15) gilt, folgt $\Delta W_{kin} = -\Delta W_{pot,G}$ bzw. $\Delta W_{kin} + \Delta W_{pot,G} = \Delta W_{Ges} = 0$.

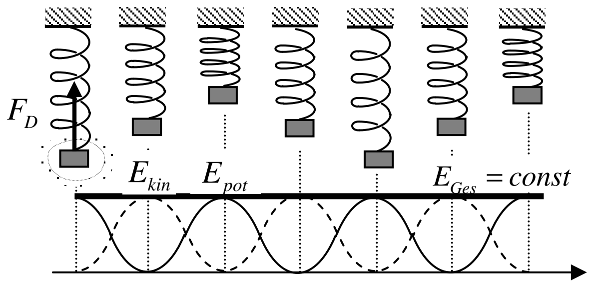


Also ändert sich die Gesamtenergie nicht, sie bleibt *konstant*: $\boxed{W_{kin} + W_{pot,G} = W_{Ges} = konst}$

c) Beim <u>Federpendel</u> ist es entsprechend: $\boxed{W_{kin} + W_{pot,D} = W_{Ges} = konst}$.

d) <u>Bespiele</u>





O) Leistung

Das Zuführen von Energie ΔW durch die Systemgrenze, also das Verrichten von Arbeit, nimmt Zeit Δt in Anspruch. Wie schnell die Zuführung erfolgt, wird durch die *Leistung* P erfasst. P ist das Verhältnis von ΔW zu Δt, also $\boxed{P = \Delta W / \Delta t}$.
Die Momentanleistung zum Zeitpunkt t ergibt sich dann durch den Grenzwert, also durch die erste Ableitung der Arbeit nach der Zeit $\boxed{P(t) = \dot{W}(t)}$.

a) <u>Leistung im Schwerefeld</u> der Erde (ohne Berücksichtigung der Anfangs- u. Endbeschl.)
Zieht man die Masse m mit einer konstanten Geschwindigkeit v empor, so wächst ihre Höhe gemäß $h(t) = v \cdot t$. Damit muss im Verlaufe der Zeit die Arbeit $W(t) = m \cdot g \cdot (v \cdot t)$ zugeführt werden. Ableiten nach t ergibt $\boxed{P(t) = m \cdot g \cdot v}$.
Bei konstanter Hubgeschwindigkeit ist die Hubleistung also konstant.

b) <u>Leistung an der Spiralfeder.</u>
Die Arbeit zur Federverlängerung auf die Auszugslänge x beträgt $W = ½ D \cdot x^2$. Soll die Feder mit konstanter Geschwindigkeit v verlängert werden, so ist wieder $x = v \cdot t$ einzusetzen. Ableiten von $W(t) = ½ D \cdot v^2 \cdot t^2$ nach t ergibt $P(t) = D \cdot v^2 \cdot t$. Die Leistung muss also linear mit der Zeit zunehmen, um konstante Geschwindigkeit zu erreichen.

c) <u>Leistung zur Überwindung der Gleitreibung.</u>
Bei konstanter Geschwindigkeit gilt $s = v \cdot t$. Ableiten von $W_R(t) = f \cdot m \cdot g \cdot s$ ergibt wegen $\dot{s} = v$ die konstante Leistung $P(t) = f \cdot m \cdot g \cdot v$.

d) <u>Leistung zur Überwindung der Trägheitskraft, Beschleunigungsleistung</u>.
Bei der Beschleunigung nimmt der Körper (das Fahrzeug) die zugeführte Energie als kinetische Energie W_{kin} auf, so dass diese sich um $\Delta W_{kin} = F \cdot \Delta x = m \cdot a \cdot \Delta x$ vergrößert.
Damit ergibt sich $P = \Delta W_{kin} / \Delta t = m \cdot a \cdot \Delta x / \Delta t = m \cdot a \cdot v$, also $\boxed{P(t) = m \cdot a \cdot v = F \cdot v}$.
Jetzt werden mehrere Fälle diskutiert.

1) <u>Fahren mit konstanter Geschwindigkeit, *v = const*</u>. (Ohne Reibung)
Jetzt ist $v = const$ und somit $a = 0$. Daher folgt $P(t) = 0$. Für konstante Geschwindigkeit ist also *keine* Leistung erforderlich. Das entspricht Galilei's Trägheitsgesetz.

2) <u>Fahren mit konstanter Beschleunigung, *a = const*</u>. (Ohne Reibung)
Für $a = const$ nimmt die Geschwindigkeit gemäß $v = a \cdot t$ linear zu, sodass sich $P(t) = m \cdot a^2 \cdot t$ ergibt. Die Leistung muss also mit der Zeit linear hochgefahren werden, um konstante Beschleunigung zu erreichen. – Auch die Erde überträgt auf den konstant beschleunigt fallenden Körper zunehmend mehr Energie pro Sekunde.

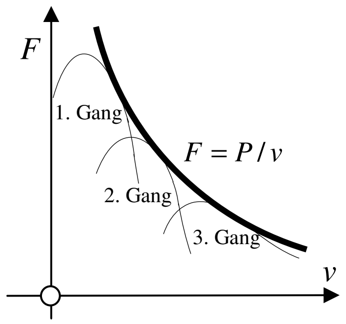
3) <u>Fahren mit konstanter Leistung, *P = const*</u>. (Ohne Reibung)
Konstante Leistung liegt z.B. vor, wenn ein Auto per Getriebe in der Lage ist, seine volle Leistung von z.B. $P = 50kW$ *durchgängig* auf die Straße zu bringen. Wegen $P = F \cdot v = const$ (s. oben) wird die Antriebskraft F dann mit zunehmender Geschwindigkeit v immer geringer. Das hat nichts mit zunehmendem Luftwiderstand zu tun, denn dieser wird hier gar nicht beachtet. Wie kann man das veranschaulichen?

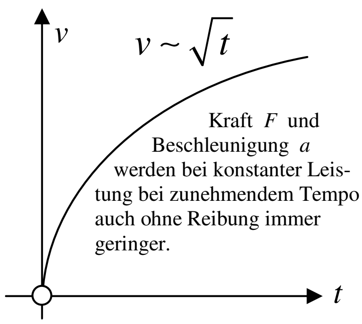
Bei den einfachen Maschinen der Mechanik, wie dem Flaschenzug oder der schiefen Ebene gilt die „goldene Regel“ $\Delta W = F \cdot \Delta s$, welche besagt, dass man die *gleiche* Arbeit z.B. mit halber Kraft verrichten kann, wenn man dafür den doppelte Weg in Kauf nimmt. - *Verdoppelt* man nun den (pro Sekunde zurückgelegten) Weg, weil man das Tempo verdoppelt hat, so muss man die halbe Kraft in Kauf nehmen, weil ja die *gleiche* Arbeit pro Sekunde (wegen $P = \Delta W / \Delta t = const$) verrichtet werden soll.

Somit werden Kraft F und damit auch Beschleunigung $a = F / m$ bei zunehmendem Tempo immer geringer. Das hat nichts mit Reibung zu tun, das Auto fährt der Kraftübertragung „einfach davon“. Die Gangschaltung kann das nicht ausgleichen, sie dient lediglich dazu, möglichst durchgängig die volle Leistung auf die Straße zu bringen.
Wie entwickelt sich die Geschwindigkeit beim Fahren mit konstanter Leistung?
Bei *konstanter* Leistung erhält das Fahrzeug vom Motor pro Sekunde stets die *gleiche* Energiemenge, sodass die gesamte übertragene Energie (entsprechend der Minderung des Tankinhaltes) gemäß $W = P \cdot t$ *linear* mit der Zeit zunimmt.
Ohne Reibung verwandelt sich diese Energie komplett in kinetische Energie.
Daher gilt: $P \cdot t = ½ m v^2$.
Umstellen nach v ergibt

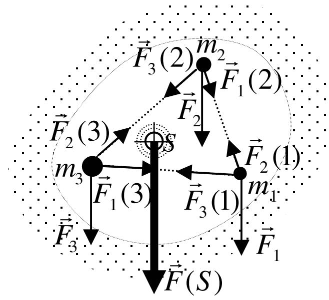
$$v(t) = \sqrt{\frac{2P}{m}} \cdot \sqrt{t} \sim \sqrt{t} \ .$$

Die Geschwindigkeit nimmt also nur noch „wurzelmäßig“ zu. Auch das liegt *nicht* an der Reibung, bei der es letztlich *gar keine* Geschwindigkeitszunahme gäbe, sondern es ist prinzipieller Natur.





Anhang 1) Herleitung des Schwerpunktsatzes



Beispiel: Im Schwerefeld der Erde befinden sich drei Massen, die elektrisch geladen, mit Spiralfedern verbunden oder sonst wie aneinander gekoppelt sind. Diese drei Massen *und* die gegenseitigen Kopplungen werden zu *einem* physikalischen System zusammengefasst. An der Masse m_1 am Ort $\vec r_1$ greifen dann die beiden *inneren* Kräfte $\vec F_2(1)$ und $\vec F_3(1)$, sowie die, durch die Systemgrenze stoßende, *äußere* Schwerkraft $\vec F_1$ an. Für m_2 und m_3 gilt entsprechendes. Für jede Masse erhalten wir so eine Newtongleichung. Sie lauten:

$$\left.\begin{aligned} m_1\cdot\vec a_1 &= \vec F_2(1)+\vec F_3(1)+\vec F_1 \\ m_2\cdot\vec a_2 &= \vec F_1(2)+\vec F_3(2)+\vec F_2 \\ m_3\cdot\vec a_3 &= \vec F_1(3)+\vec F_2(3)+\vec F_3 \end{aligned}\right\} \text{Addieren} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} m_1\cdot\vec a_1+m_2\cdot\vec a_2+m_3\cdot\vec a_3 = \vec F_1+\vec F_2+\vec F_3 &+ \\ +\vec F_2(1)+\vec F_1(2) &\;\rbrace 0 \\ +\vec F_3(1)+\vec F_1(3) &\;\rbrace 0 \\ +\vec F_3(2)+\vec F_2(3) &\;\rbrace 0 \end{aligned}$$

Die inneren Kräfte heben sich paarweise wegen des Newton III weg, damit verbleibt $m_1\cdot\vec a_1+m_2\cdot\vec a_2+m_3\cdot\vec a_3=\vec F_1+\vec F_2+\vec F_3=\vec F_{äußere\,Gesamtkraft}$. Wegen $\vec a_1=\dot{\vec v}_1$, $\vec a_2=\dot{\vec v}_2$, $\vec a_3=\dot{\vec v}_3$ gilt $m_1\cdot\vec a_1+m_2\cdot\vec a_2+m_3\cdot\vec a_3=m_1\cdot\dot{\vec v}_1+m_2\cdot\dot{\vec v}_2+m_3\cdot\dot{\vec v}_3=\vec F_{äußere\,Gesamtkraft}$ bzw.

$\left(m_1\cdot\vec v_1+m_2\cdot\vec v_2+m_3\cdot\vec v_3\right)^{\bullet}=\vec F_{äußere\,Gesamtkraft}$. Nun kommt der Schwerpunkt ins Spiel.

$\vec x_S=\dfrac{m_1\cdot\vec r_1+m_2\cdot\vec r_2+m_3\cdot\vec r_3}{M_{Ges}}$. Ableiten ergibt: $\vec v_S=\dot{\vec x}_S=\dfrac{m_1\cdot\vec v_1+m_2\cdot\vec v_2+m_3\cdot\vec v_3}{M_{Ges}}$.

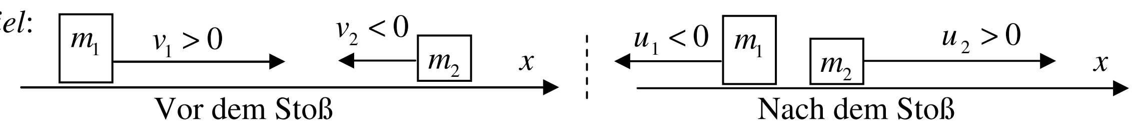
Auflösen nach dem Zähler und Einsetzen ergibt somit $M_{Ges}\cdot\dot{\vec v}_S=\vec F_{äußere\ Krafsumme}$.

Da aber $\ddot{\vec x}_S=\dot{\vec v}_S=\vec a_S$ die Beschleunigung des Schwerpunktes ist, erhalten wir eine Newton-Gleichung für den Schwerpunkt $\boxed{M_{Ges}\cdot\vec a_S=\vec F_{äußere\ Krafsumme}}$.

Newtons wandte seine Gleichungen zunächst auf die Bewegung der Planeten an. Da die Sonne aber (nach heutiger Kenntnis) 99,85% der Masse des gesamten Sonnensystems beinhaltet, erscheinen die Planeten tatsächlich punktförmig, so dass das MP-Konzept stimmig war. Wenn dasselbe Konzept auf einen *ausgedehnten* Körper angewandt wird, so müsste man jedes einzelne Atom als Massepunkt modellieren und hätte somit ein gekoppeltes Gleichungssystem mit einigen 10^{23} Gleichungen. Das lässt sich nicht lösen. Der Schwerpunktsatz zeigt, dass man den ausgedehnten Körper durch seinen Schwer*punkt* ersetzen kann, welcher fiktiv die Gesamtmasse beinhaltet, wodurch das MP-Konzept auch hier hilft.

Anhang 2) Auswertung der Messergebnisse des elastischen und inelastischen Stoßes.

1) Versuchsaufbau. Zwei Gleitwagen der Massen m_1 und m_2 gleiten „reibungslos“ auf der Luftkissenbahn und stoßen elastisch zusammen. Die Richtung der x-Achse definiert das Vorzeichen der Geschwindigkeiten. Beim Gegenstoß können sich sämtliche Geschwindigkeitsrichtungen umkehren.
Bezeichnungen: Geschwindigkeiten vor bzw. nach den Stoß: v_1 und v_2 bzw. u_1 und u_2.
Beispiel:



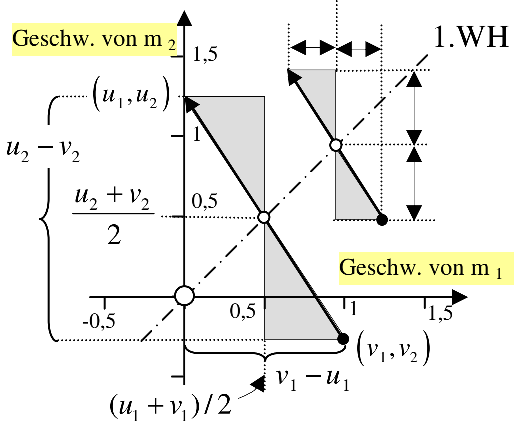
Messbeispiel: $m_1 = 0,3\,kg$ und $m_2 = 0,2\,kg$.

Versuch 1:	Mitstoß			Versuch 2:	Gegenstoß		
v_1	1,25	v_2	0,5	v_1	1	v_2	-0,25
u_1	0,65	u_2	1,4	u_1	0	u_2	1,25

2) <u>Transformationsgesetz</u>: Die Ortsänderungen interessieren beim Stoßexperiment *nicht*. Wesentlich ist ausschließlich der Übergang von (v_1, v_2) nach (u_1, u_2). Im Geschwindigkeitsdiagramm bedeutet ein Punkt $P(x|\,y)$, dass m_1 die Geschwindigkeit x und m_2 die Geschwindigkeit y inne hat. Die Stoßtransformation erscheint jetzt als Übergang von $P(v_1|\,v_2)$ nach $Q(u_1|\,u_2)$. Die Graphik zeigt, dass alle Stöße für ein gegebenes Massepaar in dieser Darstellung *parallele Schrägspiegelungen* an der 1. Winkelhalbierenden sind:

Der Mittelpunkt $M\left(\frac{u_1+v_1}{2}\,\middle|\,\frac{u_2+v_2}{2}\right)$ liegt also auf der 1. WH. $\Rightarrow \frac{u_2+v_2}{2} = \frac{u_1+v_1}{2}$

Für die Steigung *liest* man $\frac{u_2-v_2}{u_1-v_1} = -\frac{m_1}{m_2}$ *ab.*



Umstellen ergibt

I) $u_2 + v_2 = u_1 + v_1$

II) $u_2 - v_2 = -\frac{m_1}{m_2}\cdot u_1 + \frac{m_1}{m_2}\cdot v_1$

I)−II) $2v_2 = \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)u_1 + \left(1-\frac{m_1}{m_2}\right)v \quad \Big| \cdot m_2$

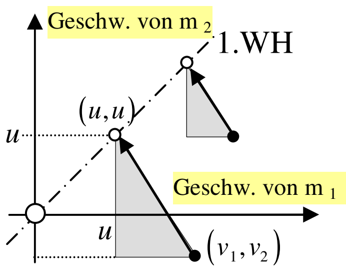
Umstellen nach u_1 und u_2 liefert

$\boxed{u_1 = \frac{(m_1-m_2)\cdot v_1 + 2m_2\cdot v_2}{m_1+m_2}}$. Entsprechend erhält man $\boxed{u_2 = \frac{2m_1\cdot v_1 + (m_2-m_1)\cdot v_2}{m_1+m_2}}$.

3) <u>Inelastischer Stoß.</u>

Die Messdaten ergeben hier stets parallele Übergänge ebenfalls unter der Steigung $-m_1/m_2$ auf die 1.WH.

Aus $\frac{u-v_2}{u-v_1} = -\frac{m_1}{m_2}$ folgt dann $\boxed{u_1 = u_2 = u = \frac{m_1\cdot v_1 + m_2\cdot v_2}{m_1+m_2}}$



4) <u>Invarianten</u>: Grundlegend ist die Suche nach *Erhaltungsgrößen* = Invarianten.

a) Gesucht ist eine *lineare Invariante*, die beim <u>elastischen</u> Stoß erhalten bleibt. Ist ein <u>*Ansatz*</u>: $c_1\cdot v_1 + c_2\cdot v_2 = c_1\cdot u_1 + c_2\cdot u_2$ möglich? <u>*Ges*</u>.: Konst. Zahlen c_1, c_2.

Einsetzen: $c_1\cdot v_1 + c_2\cdot v_2 = c_1\cdot\frac{2m_2\cdot v_2 + (m_1-m_2)\cdot v_1}{m_1+m_2} + c_2\cdot\frac{2m_1\cdot v_1 + (m_2-m_1)\cdot v_2}{m_1+m_2}$.

Erweitern und Ausmultiplizieren:

$c_1m_1v_1 + c_1m_2v_1 + c_2m_1v_2 + c_2m_2v_2 = 2c_1m_2v_2 + c_1m_1v_1 - c_1m_2v_1 + 2c_2m_1v_1 + c_2m_2v_2 - c_2m_1v_2$

Zusammenfassen liefert $c_1m_2(v_1-v_2) = c_2m_1(v_1-v_2)$. Da der Stoß nur für $v_1 \neq v_2$ erfolgt, ergibt sich $c_1m_2 = c_2m_1$. Das wird aber z.B. gelöst durch $c_1 = m_1$ und $c_2 = m_2$. Damit gilt $m_1\cdot v_1 + m_2\cdot v_2 = m_1\cdot u_1 + m_2\cdot u_2$ und der Ausdruck $m_1\cdot v_1 + m_2\cdot v_2$ ist eine Invariante.

<u>*Ergebnis*</u>: Wir haben den **Gesamtimpuls** als lineare Invariante bei elast. Stoß entdeckt.

Inelastischer Stoß: Einsetzen von $u_1 = u_2 = u = \dfrac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$ in $m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$

liefert $u \cdot (m_1 + m_2) = \dfrac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \cdot (m_1 + m_2) = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2$. ✓

Ergebnis: Auch bei inelastischen Stoß gilt der Impulserhaltungssatz.

b) Gesucht ist eine *quadratische Invariante*, die beim elastischen Stoß erhalten bleibt. Ist ein *Ansatz* $c_1 \cdot v_1^2 + c_2 \cdot v_2^2 = c_1 \cdot u_1^2 + c_2 \cdot u_2^2$ möglich? *Ges*.: Konst. Zahlen c_1, c_2.
Umstellung ergibt $c_1 \cdot \left(u_1^2 - v_1^2\right) = c_2 \cdot \left(v_2^2 - u_2^2\right)$. Die Klammern werden umgeformt:

$$u_1^2 - v_1^2 = \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_1^2 + 4m_2^2 v_2^2 - 2m_1 m_2 v_1^2 + 4m_1 m_2 v_1 v_2 - 4m_2^2 v_1 v_2}{(m_1+m_2)^2} - \frac{(m_1^2 + 2m_1 m_2 + m_2^2) v_1^2}{(m_1+m_2)^2} .$$

Da hebt sich einiges weg und man kann ausklammern:

$$u_1^2 - v_1^2 = 4m_2 \cdot \frac{m_2 v_2^2 - m_1 v_1^2 + m_1 v_1 v_2 - m_2 v_1 v_2}{(m_1+m_2)^2} .$$ Entsprechend erhält man

$$v_2^2 - u_2^2 = 4m_1 \cdot \frac{m_2 v_2^2 - m_1 v_1^2 + m_1 v_1 v_2 - m_2 v_1 v_2}{(m_1+m_2)^2} .$$

Die Brüche sind gleich, so dass $c_2 / c_1 = (u_1^2 - v_1^2)/(v_2^2 - u_2^2) = m_2 / m_1$ heraus kommt.
Also gilt $c_1 m_2 = c_2 m_1$. Das wird aber z.B. durch $c_1 = m_1$ und $c_2 = m_2$ gelöst.
Daher ist auch der quadratische Ansatz mit *konstanten* Zahlen c_1 und c_2 erfüllbar.
Einsetzen liefert $m_1 \cdot \left(u_1^2 - v_1^2\right) = m_2 \cdot \left(v_2^2 - u_2^2\right)$ bzw. $\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2\right) = \left(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2\right)$.
Wie unten gezeigt wird, ist es sinnvoll, diese Gleichung noch auf beiden Seiten mit ½ zu multiplizieren: Dann folgt $\tfrac12\, m_1 v_1^2 + \tfrac12\, m_2 v_2^2 = \tfrac12\, m_1 u_1^2 + \tfrac12\, m_2 u_2^2$.
Der Ausdruck $\boxed{W_{kin} = \tfrac12 m v^2}$ wird *kinetische Energie* genannt. Nach Newton vergingen fast hundert Jahre, ehe diese abstrakte Größe entdeckt wurde. Heute redet jeder von „Energie“, hier sehen wir aber, welcher gedankliche Aufwand nötig ist.

Ergebnis: Bei der elastischen Wechselwirkung bleibt die **gesamte kinetische Energie** innerhalb des *abgeschlossenen* Systems erhalten: $\boxed{\frac12 m_1 v_1^2 + \frac12 m_2 v_2^2 = \frac12 m_1 u_1^2 + \frac12 m_2 u_2^2}$

Inelastischer Stoß: Einsetzen von $u_1 = u_2 = u = \dfrac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$ in $\dfrac12 m_1 u_1^2 + \dfrac12 m_2 u_2^2$ liefert

$$\frac12 \left(m_1 + m_2\right) u^2 = \frac12 \left(m_1 + m_2\right) \cdot \left(\frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac12 \frac{\left(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2\right)^2}{m_1 + m_2} .$$ Vergleichen:

$$\frac12 \frac{\left(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2\right)^2}{m_1 + m_2} - \frac12 \left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2\right) = \frac12 \frac{m_1^2 v_1^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 + m_2^2 v_2^2 - \left(m_1 + m_2\right)\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2\right)}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac12 \frac{\cancel{m_1^2 v_1^2} + 2m_1 m_2 v_1 v_2 + \cancel{m_2^2 v_2^2} - \cancel{m_1^2 v_1^2} - m_1 m_2 v_1^2 - m_1 m_2 v_2^2 - \cancel{m_2^2 v_2^2}}{m_1 + m_2} = \frac12 \frac{m_1 m_2 \cdot \left(2 v_1 v_2 - v_1^2 - v_2^2\right)}{m_1 + m_2} =$$

$$= -\frac12 \frac{m_1 m_2 \cdot \left(-2 v_1 v_2 + v_1^2 + v_2^2\right)}{m_1 + m_2} = \underline{\underline{-\frac12 \frac{m_1 m_2 \cdot \left(v_1 - v_2\right)^2}{m_1 + m_2} = \Delta W}} .$$ Es gibt also einen *Energieverlust*.

P) Fall- und Wurfbewegung.

Ein Körper der Masse m bewege sich in reibungsfreiem Flug nahe über der Erdoberfläche. Die Reaktionskraft von m auf die Erde wird wegen deren großer Masse ignoriert.
Unser physikalisches System besteht somit nur die Masse m selbst. Durch die Systemgrenze greift lediglich die orts- und zeitunabhängige Schwerkraft $F_G = m \cdot g$ als *äußere* Kraft an. Zwar wirkt im Moment des Abwurfes eine weitere Kraft, doch deren Wirkung ist bereits in der Angabe der Anfangsgeschwindigkeit enthalten. Die *x*- und *y*-Achse des Koordinatensystems zeichnet man parallel und die *z*-Achse senkrecht zum Erdboden.
Als Abwurf*ort* wählt man den Koordinaten*ursprung* und als Abwurf*zeit* wählt man $t = 0$.
Um den Bewegungsablauf vollständig *vorhersagen* zu können, braucht man *sechs* Anfangsbedingungen und *sechs* Bewegungsgleichungen. Die sechs Anfangszahlen haben wir schon, sie stecken in *Anfangsort* $\vec{r}_0 = (0,0,0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$.

<u>Drei</u> Gleichungen stammen vom zweiten Newtonsche Gesetz $\dot{\vec{v}} = \vec{F} / m$.
Dieses verbindet die Geschwindigkeitsänderungen mit den Kräften.
<u>Drei</u> weitere Gleichungen liefert die *Differentialrechnung*.
Sie verbindet die Ortsänderungen mit den Geschwindigkeiten: $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$.

Anwendung der Newtonschen Gleichungen:
Die Schwerkraft $F_z = -m \cdot g$ wirkt *nur* in *z*-Richtung. Deshalb bleiben $v_x(t)$ und $v_y(t)$ durchgängig auf ihren Anfangswerten.
In *z*-Richtung ändert sich die Geschwindigkeit gemäß $\dot{v}_z(t) = -g$. Weil sich die Masse m heraus gekürzt hat, müssen *alle* Massen (ohne Reibung) *gleich* schnell fallen. Das bestätigt der Fallversuch von Bleikugel und Daumenfeder im evakuierten Fallrohr.
Wegen $\dot{v}_z(t) = -g$ muss nun eine Funktion $v_z(t)$ gefunden werden, deren erste Ableitung den konstanten Wert $-g$ besitzt. Dies ist $v_z(t) = -g \cdot t + C$, denn die Ableitung der Konstanten C liefert ja null. Probe: $\dot{v}_z(t) = -g + 0 = -g$ ✓. Weil $v_z(0) = v_{z0}$ sein *soll*, muss $C = v_{z0}$ gesetzt werden. Damit gilt $v_z(t) = -g \cdot t + v_{z0}$. Die Geschwindigkeit in z-Richtung nimmt also, ausgehend von ihrem Anfangswert, *linear ab*. Wird der Körper nach oben geschossen, so ist $v_{z0} > 0$ und der Körper steigt anfangs, aber seine Steiggeschwindigkeit wird pro Sekunde um $g = 9{,}81 m/s$ vermindert, bis sie am höchsten Punkt den Wert null erreicht.
Ab dann wird v_z negativ und der Körper fällt zum Erdboden zurück.
Ergebnis für die Geschwindigkeit: $\boxed{v_x(t) = v_{x0} \;;\quad v_y(t) = v_{y0} \;;\quad v_z(t) = -g \cdot t + v_{z0}}$.

Anwendung der Geschwindigkeit – Ort – Beziehung:
Die Differentialrechnung ermöglichte, die Momentangeschwindigkeit mit der Ortsänderung zu verbinden. Daher müssen wir jetzt $\dot{x}(t) = v_{x0}$; $\dot{y}(t) = v_{y0}$; $\dot{z}(t) = -g \cdot t + v_{z0}$ fordern.
Die gesuchten Funktionen sind $x(t) = v_{x0} \cdot t$; $y(t) = v_{y0} \cdot t$; $z(t) = -½\, g \cdot t^2 + v_{z0} \cdot t$, denn deren Ableitungen ergeben genau das Vorausgesetze. Außerdem ist gewährleistet, dass der Körper zum Zeitpunkt $t = 0$ im Koordinatenursprung $(0,0,0)$ startet.
Ergebnis für den Ort: $\boxed{x(t) = v_{x0} \cdot t \;;\quad y(t) = v_{y0} \cdot t \;;\quad z(t) = -½\, g \cdot t^2 + v_{z0} \cdot t}$

Wegen der fehlenden Kraftkomponenten bewegt sich der Körper in *x*- und y –Richtung also gleichförmig. In z –Richtung hingegen bewirkt die Gravitation eine quadratische Zeitfunktion. Die Fall- bzw. Wurfbewegung insgesamt ist somit eine *Superposition* von drei *unabhängigen* Bewegungen. Schaue ich den Wurf senkrecht von oben an, so sehe ich die Tiefe nicht und der Körper scheint sich gleichförmig nach vorn zu bewegen. Laufe ich unter dem schrägen Wurf am Boden mit, so sehe ich den Stein nur senkrecht auf- und absteigen. Lasse ich einen Stein aus dem Zugfenster fallen, so fällt der Stein senkrecht am Zug hinunter. Vom Bahndamm aus scheint der der Stein hingegen wie beim waagerechten Wurf zu fliegen.

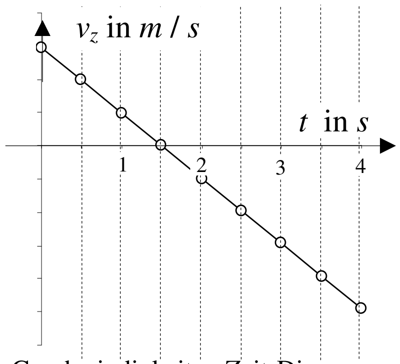
Aus den sechs Lösungsgleichungen lassen sich alle Spezialfälle und Einzelfragen ableiten.

c) Senkrechter Wurf

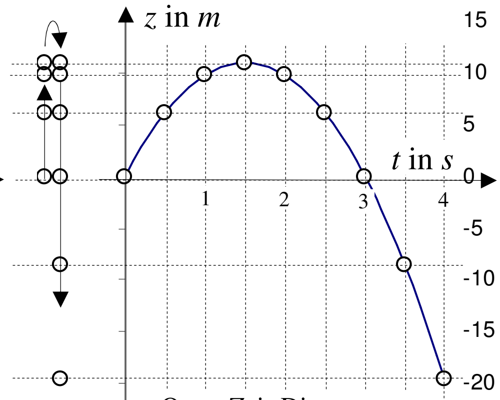
Beim senkrechten Wurf bleiben die Geschwindigkeiten und Orte in x- und y –Richtung null und brauchen nicht weiter beachtet zu werden. Geschwindigkeit und Ort in z –Richtung entwickeln sich gemäß $v_z(t) = -g \cdot t + v_{z0}$ und $z(t) = -½\, g \cdot t^2 + v_{z0} \cdot t$.

Im Beispiel wird ein mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_{z0} > 0$ nach oben geworfen. Die Steiggeschwindigkeit nimmt dann linear ab. Zu einem Zeitpunkt $\overline{t}$ ist die Geschwindigkeit dann null. Es gilt $0 = -g \cdot \overline{t} + v_{z0} \Rightarrow \overline{t} = v_{z0} / g$. Nun hat der Körper den höchsten Punkt $\overline{z} = z(\overline{t}) = -½\, g \cdot \overline{t}^{\,2} + v_{z0} \cdot \overline{t} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{v_{0z}^2}{g}$ erreicht. Anschließend sinkt er wieder und erreicht, auf Grund der Symmetrie der Parabel den Boden $z = 0$ zum Zeitpunkt $2 \cdot \overline{t} = \frac{2 \cdot v_{z0}}{g}$.



Geschwindigkeits - Zeit-Diagramm



Orts - Zeit-Diagramm

d) Schräger Wurf

Die Koordinaten (x, y, z) und Geschwindigkeit (v_x, v_y, v_z) als Funktion der Zeit:

Größen	x - Richtung	y - Richtung	z - Richtung
Beschleunigung	$a_x = 0$	$a_y = 0$	$a_z = -g$
Geschwindigkeit	$v_x(t) = v_{0x}$	$v_y(t) = v_{0y}$	$v_z(t) = -g \cdot t + v_{0z}$
Ort	$x(t) = v_{0x} \cdot t$	$y(t) = v_{0y} \cdot t$	$z(t) = -1/2 \cdot g \cdot t^2 + v_{0z} \cdot t$

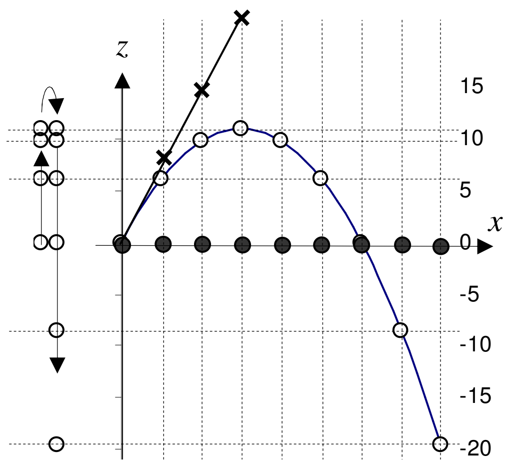
e) Graphen

Die sichtbare Bahnkurve erhält man durch Eliminieren der Zeit t:

Aus $x = v_{0x} \cdot t$ folgt $t = \frac{x}{v_{0x}}$.

Einsetzen in $z = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_{0z} \cdot t$ ergibt

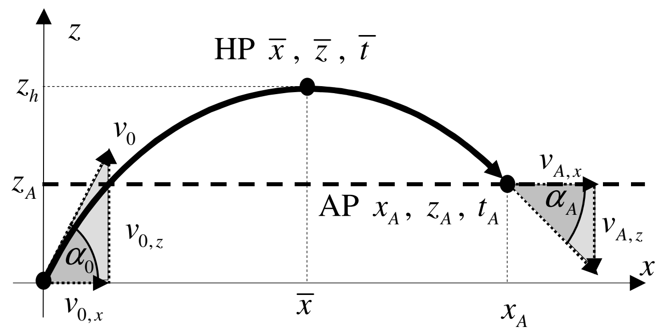
$z = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2 + v_{0z} \cdot \frac{x}{v_{0x}}$ bzw. die Bahnparabel $z = -\frac{g}{2 v_{0x}^2} \cdot x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} \cdot x$. Flöge jemand längs der Starttangenten empor, so sähe er den Stein unter sich „normal“ runter fallen.



Ohne die Schwerkraft ergäbe sich eine Bewegung entlang der Starttangente

f) Bezeichnungen

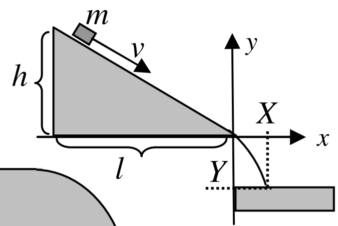
Start: $\left(x_0 = 0 \mid z_0 = 0\right)$; $\left(v_{0x} \mid v_{0z}\right)$ bzw.
v_0 ; $\alpha_0 \Rightarrow v_{0,x} = v_0 \cos\alpha$; $v_{0z} = v_0 \sin\alpha$
Hochpunkt: $\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}$
Aufschlaghöhe: Gefordert z_A
Aufschlagweite und –zeit: x_A , t_A
Aufschlaggeschw.: v_{Ax}, v_{Az}
Aufschlagwinkel $\alpha_A = \arctan(v_{Az} / v_{Ax})$



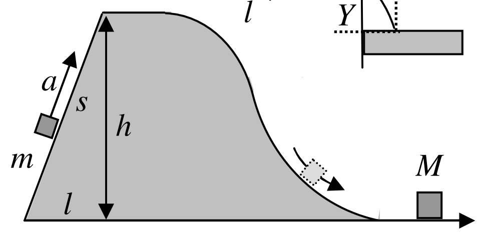
Q) Abituraufgaben Mechanik, Leistungskurs (Komprimiert)

1) Eine Kugel von $m_1 = 50g$ wird mit v_1 in eine ruhende Mehltüte mit $m_2 = 2kg$ geschossen, welche reibungsfrei mit einer Feder ($D = 10kN/m$) an einer Wand befestigt ist. Diese wird $s = 20\,cm$ eingedrückt. Wie groß sind v_1 und v_2 unmittelbar nach dem Einschuss? Wie groß ist der Energieverlust?

2) Eine Masse $m = 100g$ rutsche reibungsfrei eine Rampe mit $l = 2m$ und $h = 1{,}5m$ hinunter. Dann falle sie auf ein Brett in der Tiefe $Y = -0{,}5m$. Wie groß sind ihre Geschwindigkeitskomponenten am Ende der Rampe? An welcher Stelle x trifft sie auf ?



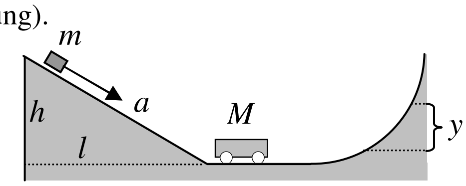
3) Ein Achterbahnwagen der Masse $m = 60kg$ wird reibungsfrei durch eine Zugvorrichtung mit $a = 1m/s^2$ auf der Länge $l = 4m$ die Höhe $h = 20m$ empor beschleunigt. Welche Kraft ist dafür erforderlich und wie groß ist die Geschwindigkeit oben? Mit der erreichten Geschwindigkeit saust er wieder herab und rammt voll elastisch die stillstehende Masse $M = 200kg$ .Was geschieht?



4) Ein Versuchsfahrzeug von $m = 800\,kg$ beschleunigt aus dem Stand mit konstant $a = 2{,}5\,m/s^2$. Wie groß ist v nach $15\,s$? Wie weit ist es gekommen? Wieviel Energie wurde verbraucht (Ohne Reibung)? Das Fahrzeug hat die Maximalleistung $P_{max} = 90kW$. Was geschieht?

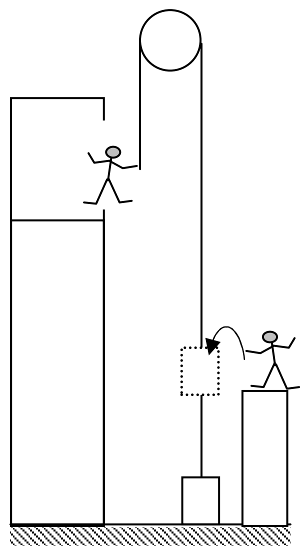
5) Ein Elektroauto, $m = 700\,kg$, benötigt keine Schaltung. Es ist näherungsweise in der Lage, seine volle Leistung von $P = 60kW$ umzusetzen. Wie schnell ist das Auto nach $10\,s$? Wie weit ist es dann gekommen? Wieviel Energie wurde verbraucht? (ohne Reibung).

6) Ein Klotz der Masse $m = 2\,kg$ rutscht reibend (Gleitreibungszahl $f = 0{,}2$) eine Rampe mit $l = 2\,m$, $h = 0{,}8\,m$ hinunter. Die Haftreibung wird durch einen minimalen Anstoß überwunden. Wie groß ist die Geschwindigkeit am Ende der Rampe? Mit diese Geschwindigkeit stößt der Klotz elastisch gegen einen Rollwagen der Masse $M = 800\,g$. Wie hoch läuft (der Schwerpunkt von) M reibungsfrei den Berg empor?



7) Als Lichtschranken und elektrischen Uhren noch fehlten diente die Atwoodsche Fallmaschine zur g-Bestimmung. Sei $m_1 = 1kg$. Wie groß muss m_2 sein, damit die Fallbeschl. auf 1/4 reduziert wird? Wie groß ist dann die Seilspannung?

8) Auf der Flucht greift Dr. Kimble ($m = 75kg$) im 5. Stock (16m Höhe) das freie Seil einer Lastenrolle, an deren anderen Ende ein Betonkübel mit $M_1 = 50kg$ am Boden steht, so dass er den bei seiner Abfahrt über die Rolle hochzieht. Als der Kübel 5m Höhe erreicht hat wirft sein Verfolger von der anderen Hausseite eine Masse von zusätzlichen $M_2 = 50kg$ in den Kübel. Erreicht Kimble den Boden?



Lösungen

1) Von beiden Massen nach Stoß max. eingedrückt: $W_{pot} = ½ Ds^2 = 200J$. $\Rightarrow$ Geschw. beider Massen $u = \sqrt{2 \cdot W_{pot} /(m_1 + m_2)} = 13,969 m/s$. Wegen $v_2 = 0$ folgt aus $u = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1 + m_2)$ $v_1 = u \cdot (m_1 + m_2)/m_1 = 572,7 m/s$. $\Rightarrow$ Energie vor dem Stoß: $W_{vor} = ½ m_1 v_1^2 = 8200 J$.
Relativer Energieverlust: $(W_{vor} - W_{nach})/W_{vor} = (8200 - 200)/8200 = 97,6\%$.

2) Aus $½ mv^2 = gmh \Rightarrow v = 5,425 m/s$. Es gilt $v_x / v = l / \sqrt{h^2 + l^2}$ und $v_y / v = -h / \sqrt{h^2 + l^2}$
$\Rightarrow v_x = v\, l / \sqrt{h^2 + l^2} = 4,34 m/s$; $v_y = -v\, h / \sqrt{h^2 + l^2} = -3,255 m/s$. $\Rightarrow Y = -½ gt^2 + v_y t$.
Quadr. Gl.: $t_1 = 0,129s; t_2 = -0,792\, entf$. In dieser Zeit fliegt er in x-Richtung $x = v_x \cdot t_1 = 0,558m$.

3) $\tan\alpha = h/l$, Weg $s = h/\sin\alpha$. Hangabtriebskraft+Trägheitskraft $F = F_H + F_T = mg \cdot \sin\alpha + m \cdot a =$ $= 637,17 N$. Die Hubarbeit wird zu $W_{pot} = mgh = 11,772 kJ$. Die Beschleunigungsarbeit wird zu $W_{kin} = ½ mv^2 = F_T s = ma \cdot s = 1,224 kJ \Rightarrow$ Geschw. oben $v = 6,387 m/s$. Gesamtenergie oben $W = W_{pot} + W_{kin} = 12,996 kJ$. Geschw. unten $v_1 = \sqrt{2W/m} = 20,813 m/s$. Elastischer Stoß: $u_1 = -11,207 m/s; u_2 = 9,606 m/s$ heißt, dass der Wagen wieder auf $Y = 6,402m$ aufsteigt.

4) $v = a \cdot \bar{t} = 37,5 m/s$; $s = ½ a\bar{t}^2 = 281,25m$, $W_{kin} = ½ mv^2 = 562,5 kJ$. $W_{kin}(t) = ½ m (v(t))^2 = ½ m(at)^2$ $\Rightarrow P(t) = \dot{W}(t) = ma^2 t = 90 \cdot 10^3 W \Rightarrow t = 18s$. Nach 18s ist keine *konstante* Beschl. mehr möglich.

5) Fahren mit konst. Leistung: $v(t) = \sqrt{2P/m} \cdot \sqrt{t} = 41,4 m/s$. $s = \int_0^t v(\tau)\, d\tau = 2/3 \cdot \sqrt{2P/m} \cdot t^{3/2} =$ $= 276m$. $W_{kin}(t) = ½ mv^2 = 600 kJ$.

6) Die Beschl beträgt $a = g \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha)$, $s = \sqrt{l^2 + h^2} = 2,154m$. $\Rightarrow t = \sqrt{2s/a} = 2,154s$. Endgeschw. $v = at = 2,801 m/s$. Elastischer Stoß bringt M auf $u_2 = 4,002 m/s \Rightarrow y = 0,816m$.

7) Aus $(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2) = 1/4 \Rightarrow m_2 = 0,6kg$. $\Rightarrow F_S = 2 m_1 m_2 g /(m_1 + m_2) = 637,17N$

8) 1.Phase: $m_1 = 75kg; m_2 = 50kg \Rightarrow a = (m_1 - m_2) g /(m_1 + m_2) = 1,962 m/s^2$. In $t = \sqrt{2h/a} = 2,258s$ werden $h = 5m$ durchfallen. Dann ist $v = a \cdot t = 4,429 m/s$. Nun wird $m_2 = 100kg \Rightarrow a = (m_1 - m_2) g /(m_1 + m_2) =$ $= -1,401 m/s^2$. Die Geschw. sinkt in der Zeit $v = a \cdot t + v_1$ sinkt in der Zeit $\tau = -v_1 / a = 2,432s$ auf null. Dann sind aber $y = ½ a\tau^2 + v_1 \tau = 16,155m$ zurückgelegt. Bis zum Boden sind es aber nur 10m, also erreicht er den Boden.