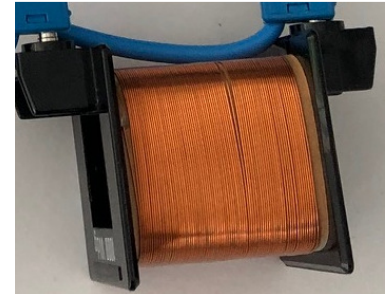
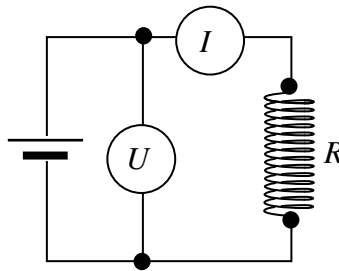


**WECHSELSTROM****Messung der Induktivität einer Spule, Bestimmung der rel. Permeabilität von Eisen.**1) Messung des Ohmschen Widerstandes der Experimentierspule in einem Gleichstromkreis

Schaltet man die Experimentierspule in einen Gleichstromkreis, so tritt keine Magnetfeldänderung und somit auch keine Induktion auf. Das Verhältnis von Spannung zu Strom liefert dann den Ohmschen Widerstand des Spulendrahtes.



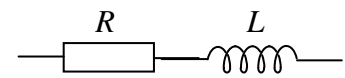
Experimentierspule

Es werden drei Spannungswerte beliebig eingestellt. Dann wird jeweils die Stromstärke gemessen. Der Quotient  $U/I$  liefert dann den Widerstandswert  $R$ . Der gemittelte Wert liegt bei  $R = 19,2 \Omega$ .

Spannung $U / V$	1,1	4,5	10
Stromstärke $I / A$	0,056	0,24	0,52
$R = U / I$ in $\Omega$	19,64	18,75	19,23
Mittelwert $R = 19,2 \Omega$			

2) Das Zeigerdiagramm der realen Spule

Da die Experimentierspule eine reale Spule mit Ohmschem Widerstand ist, verwenden wir für sie als Ersatzschaltbild die Reihenschaltung eines Widerstandes  $R$  (des Drahtwiderstandes der Spule) und einer idealen Spule (ohne Widerstand) nur mit der Selbstinduktivität  $L$ . Die Aufgabe besteht darin, den induktiven Anteil des „aufgewickelten Drahtes“ also der realen Spule, zu ermitteln. Die Induktivität tritt nur bei veränderlichem Stromfluss, also bei veränderlichem magnetischen Fluss auf.



Wird die Spule an eine sinusförmige Wechselspannung angeschlossen, so sind diese Bedingungen erfüllt und die Induktivität  $L$  kann ermittelt werden. Für das Zeigerdiagramm beachten wir:

a) In einer Reihenschaltung stimmen die Ströme durch beide Bauteile überein, ihre Zeiger sind also gleich:  $\vec{I}_R = \vec{I}_L$ . Den gemeinsamen Stromzeiger zeichnet man in beliebiger auf die  $x$ -Achse.

b) Am Widerstand sind Strom und Spannung in Phase, d.h., der Winkel zwischen  $\vec{I}_R$  und  $\vec{U}_R$  ist  $0^\circ$ . Also wird  $\vec{U}_R$  ebenfalls auf die  $x$ -Achse gezeichnet.

c) An der Spule hinkt der Strom der Spannung um  $90^\circ$  nach. Weil der Stromzeiger  $\vec{I}_L$  der Spule auf der  $x$ -Achse liegt, muss ihr Spannungszeiger  $\vec{U}_L$  auf der positiven  $y$ -Achse liegen.

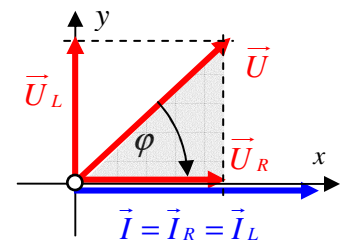
Dann hinkt der Stromzeiger  $\vec{I}_L$  um  $90^\circ$  hinter dem Spannungszeiger  $\vec{U}_L$  her. Weil noch keine Messdaten vorliegen, zeichnen wir den Spannungszeiger ebenfalls in beliebiger Länge.

d) In einer Reihenschaltung addieren sich die Teilspannungen zur Gesamtspannung.

Das ist in einer Wechselstromschaltung nicht anders als in einer Gleichstromschaltung.

Also gilt  $\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L$ . Im Zeigerdiagramm wird die Summe als Vektoraddition ausgeführt.

Der Summenzeiger zeigt dann in den 1. Quadranten des Diagramms.

3) Herleitung der Messformel

a) Die Länge  $\hat{U}$  von  $\vec{U}$  ergibt sich aus den Längen (Beträgen)  $\hat{U}_R$  und  $\hat{U}_L$  von  $\vec{U}_R$  und  $\vec{U}_L$  mit dem Satz von Pythagoras zu  $\hat{U} = \sqrt{\hat{U}_R^2 + \hat{U}_L^2}$ . Für den Betrag  $\hat{U}_R$  gilt das Ohmsche Gesetz  $\hat{U}_R = R \cdot \hat{I}_R$ . Für den Betrag  $\hat{U}_L$  gilt das verallgemeinerte „Ohmschen Gesetze“  $\hat{U}_L = X_L \cdot \hat{I}_L$ .

Wegen  $\hat{I}_R = \hat{I}_L = \hat{I}$  setzen wir  $U_R = R \cdot \hat{I}$  und  $\hat{U}_L = X_L \cdot \hat{I}$  ein. Dabei ist  $\hat{I}$  der Betrag, also die Amplitude der Stromstärke. Da die Amplituden wegen  $\hat{U} = \sqrt{2} \cdot U_{eff}$  und  $\hat{I} = \sqrt{2} \cdot I_{eff}$  zu den Effektivwerten proportional sind, können wir für  $\hat{U}$  und  $\hat{I}$  genauso  $U_{eff}$  und  $I_{eff}$  einsetzen. Der Vorteil: Die Messinstrumente zeigen die Effektivwerte an.

Einsetzen ergibt dann  $U_{eff} = \sqrt{X_R^2 + X_L^2} \cdot I_{eff}$ .

Mit  $X_R = R$  und  $X_L = \omega \cdot L$  folgt dann  $U_{eff} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot I_{eff}$ .

- Der Quotient von Spannung und Stromstärke ergibt allgemein den Widerstand.
- Bezogen auf eine Spule oder einen Kondensator heißen die Quotienten *induktiver* bzw. *kapazitiver* Widerstand und das Zeichen dafür ist  $X_L$  bzw.  $X_C$ .
- Bezieht man sich auf eine Gesamtschaltung, so heißt der Quotient *Impedanz Z*.

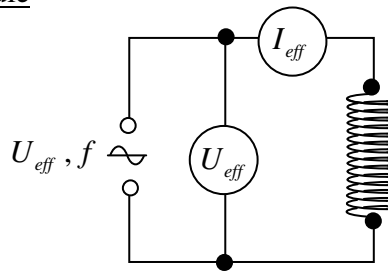
b) Die Messformel gewinnen wir durch Umstellen nach  $L$ .

Division von  $U_{eff}^2 = (R^2 + \omega^2 L^2) \cdot I_{eff}^2$  durch  $I_{eff}^2$  und einsetzen von  $U_{eff} / I_{eff} = Z^2$  führt auf

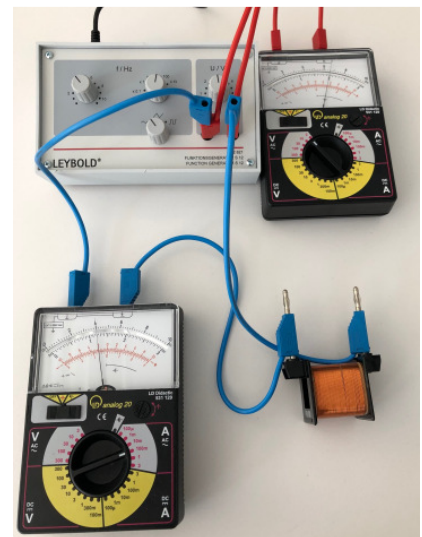
$$Z^2 = R^2 + \omega^2 L^2. \text{ Umstellen nach } L \text{ ergibt die Messformel } L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f}.$$

#### 4) Versuchsaufbau für die Luftspule

Mit dem Frequenzgenerator wird nebenstehender Aufbau realisiert. Zunächst wird die Spule ohne Eisenkern vermessen.



Spannung $U_{eff} / V$	2	2	2
Frequenz $f / Hz$	40	60	80
Stromstärke $I_{eff} / A$	0,1	0,096	0,08
Impedanz $Z / \Omega$	20,00	20,83	25,00
Induktivität $L / H$	0,0222	0,0214	0,0318
Mittelwert $L = 0,025 H$			



Luftspule

#### 5) Versuchsaubau: Spule mit Eisenkern

Ein Eisenkern, welcher genau die Spulenlänge besitzt, steht nicht zur Verfügung. Hilfsweise wurde daher ein Kern verwendet, der beidseitig jeweils um 50 % aus der Spule herausragt. Der Kern hat also die doppelte Spulenlänge.

Spannung $U_{eff} / V$	2	2	2
Frequenz $f / Hz$	40	60	80
Stromstärke $I_{eff} / A$	0,06	0,044	0,035
Impedanz $Z / \Omega$	33,33	45,45	57,14
Induktivität $L / H$	0,1084	0,1093	0,1071
Mittelwert $L = 0,108 H$ . Bei Passgenauigkeit $L = 0,054 H$			



Spule mit Eisenkern

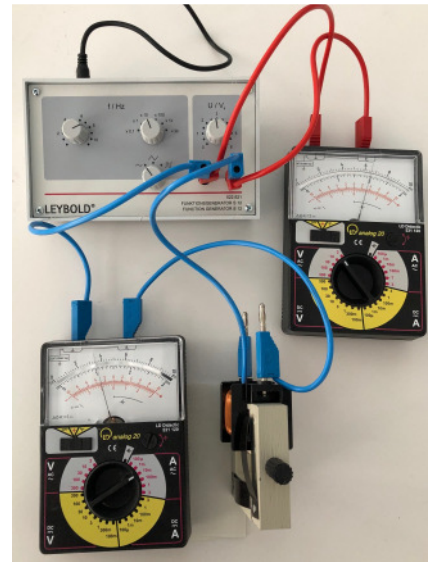
Die Selbstinduktivität  $L$  hat sich gegenüber der Luftspule vergrößert. Wäre der Kern halb so lang und würde die Spule *genau* ausfüllen, so würde sich der  $L$  - Wert in etwa halbieren. Deshalb wird *dieser* Wert als Ergebnis in die Tabelle eingetragen.

6) Spule mit geschlossenem Eisenring

Jetzt wird die Spule in einen geschlossenen Eisenring eingefügt. Das Joch wird mit einer Zwingschraube eng auf das Hufeisen gepresst, um die Größe der verbleibenden Luftschlitze zu minimieren.

Spannung $U_{eff} / V$	2	2	2
Frequenz $f / Hz$	40	60	80
Stromstärke $I_{eff} / A$	0,0065	0,0044	0,0036
Impedanz $Z / \Omega$	307,69	454,55	555,56
Induktivität $L / H$	1,2219	1,2046	1,1046
Mittelwert $L = 1,177 H$			

Die Selbstinduktivität  $L$  hat sich gegenüber der Luftspule um den Faktor 46,8 vergrößert.



Spule mit Eisenring

7) Interpretation der Ergebnisse.

a) Luftspule

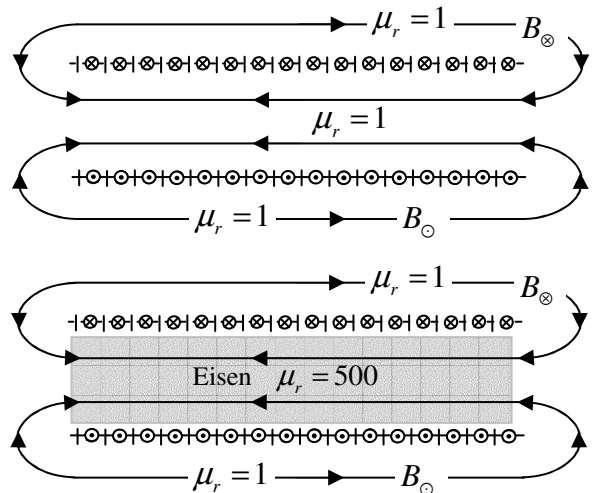
Für eine Luftspule, deren Länge  $l$  groß gegenüber ihrem Durchmesser ist, gilt für die Selbstinduktivität die Formel  $L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot A / l$ . Für unsere Spule stimmen Durchmesser und Länge in etwa überein. Die Kantenlänge der quadratischen Querschnittsfläche beträgt  $a = 4 \text{ cm}$ . Die Länge hat ebenfalls diesen Wert  $l = 4 \text{ cm}$ . Die Windungszahl ist mit  $n = 1000$  angegeben. Wir wenden die Formel trotz schlechter Gültigkeit dennoch an und erhalten  $L = 1,2566 \cdot 10^{-6} \cdot 1000^2 \cdot (0,04)^2 / 0,04 \text{ H} = 0,0283 \text{ H}$ . Das stimmt erstaunlich gut mit dem gemessenen Wert  $L = 0,025 \text{ H}$  für die Luftspule überein.

b) Spule mit Eisenfüllung

In Arbeitsblatt M3 (Magnetisches Feld) lernten wir, dass die Feldlinien der magnetischen Flussdichte  $B$  stets geschlossene Linien sind. Desweiteren lernten wir, dass der Wert von  $B$  auf dem gesamten Umlauf gleich groß ist. Der Wert hängt von den magnetischen Widerstandswerten  $\rho$  aller durchlaufenen Gebiete ab. Die Flussdichte ist also eine globale und keine lokale Größe. Der Wert der Flussdichte ist antiproportional zum magnetischen Widerstand  $R_{magn}$ .

Es gilt  $R_{magn} = \rho_1 \cdot l_1 + \rho_2 \cdot l_2$ . Dabei sind  $l_1$  und  $l_2$  die Längen der durchlaufenen Teilgebiete.

Weil die Widerstandswerte  $\rho$  die Kehrwerte der relativen Permeabilitäten sind, gilt auch  $R_{magn} = l_1 / \mu_1 + l_2 / \mu_2$ . Allgemein ist die Flussdichte  $B$  antiproportional zum magnetischen Widerstand  $R_{magn}$ , ist  $R_{magn}$  groß, dann ist  $B$  klein und umgekehrt, also  $B \sim 1 / R_{magn}$ . Wir vergleichen die  $B$ -Werte der beiden oben, im Schnitt abgebildeten Spulen der gleichen Länge  $l$ . Man sieht  $R_{magn, Luft} = l / 1 + l / 1 = l \cdot (1 / 1 + 1 / 1) = 2 \cdot l$  und  $R_{magn, Eisen} = l / 1 + l / 500 = l \cdot (1 / 1 + 1 / 500) = 1,002 \cdot l \approx l$ . Daraus folgt  $B_{Eisen} / B_{Luft} = R_{magn, Luft} / R_{magn, Eisen} = 2 \cdot l / 1,02 \cdot l = \underline{\underline{2}}$ . Der  $B$ -Wert und damit auch die Selbstinduktivität  $L$  ist bei der eisengefüllte Spule **nur** doppelt so groß wie bei der Luftspule. Auch Eisen sehr großer



Permeabilität ändert daran nichts. Die Feldlinie „bekommt von Eisen nur den halben Umlaufweg geschenkt“.

Die zweite Wegehälfte geht stets durch die Luft mit ihrem vergleichsweise sehr großen  $\rho$ -Wert.

Das Experiment (Versuchsaufbau 5) liefert  $L = 0,108 H$ . Da aber nur ein Kern mit doppelter Spulenlänge verfügbar war, ist davon auszugehen, dass ein gleich langer Kern den halben  $L$ -Wert liefert. Also  $L = 0,054 H$ .

Ein Vergleich mit dem  $L$ -Wert der Luftspule bestätigt die Theorie:

Unabhängig von der Art des Eisens erfährt der  $L$ -Wert einer Spule mit passgenauer Eisenfüllung **nur** eine Verdoppelung. Es ist ein sehr häufig anzutreffender grober Fehler, in Fall der passgenauen Eisenfüllung die relative Permeabilität  $\mu_{Fe}$  als Verstärkungsfaktor zu verwenden.

- c) Bei geschlossenem Eisenring verbleiben die Feldlinien vollständig im Eisen, so dass der Verstärkungsfaktor gegenüber der Luftspule hier tatsächlich die gesuchte relative Permeabilität des Eisens liefert. Mit  $L = 1,177 H$  erhalten wir  $\mu_{Fe} = 46,8$ .

### 8) Maßstabsgetreues Zeigerdiagramm

Das maßstabsgetreue Zeigerdiagramm für die eingerahmten Versuchsergebnisse erhält man durch die Daten ...

$$U_{eff} = 2V ; I_{eff} = 0,06 A$$

$$R = 19,21 \Omega$$

$$f = 40 Hz$$

$$L = 0,1084 H ; X_L = 2\pi f \cdot L = 27,242 \Omega .$$

$$U_R = R \cdot I_{eff} = 1,1525 V$$

$$U_L = X_L \cdot I_{eff} = 1,635 V$$

Als Maßstab für die Spannung wurde verwendet  $1V \hat{=} 1LE$ .

Als Maßstab für die Stromstärke wurde verwendet

$$1A \hat{=} 25 LE .$$

$$\text{Also } 0,06 A \hat{=} 0,06 \cdot 25 LE = 1,5 LE$$

Spule mit Eisenkern

Spannung $U_{eff} / V$	2	2	2
Frequenz $f / Hz$	40	60	80
Stromstärke $I_{eff} / A$	0,06	0,044	0,035
Impedanz $Z / \Omega$	33,33	45,45	57,14
Induktivität $L / H$	0,1084	0,1093	0,1071

