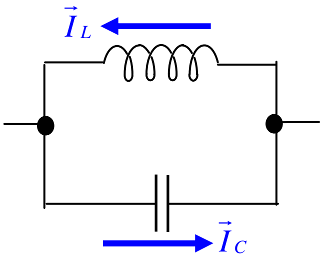
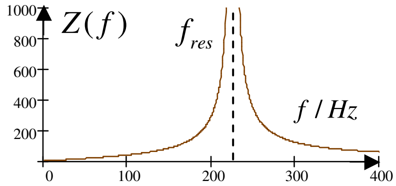
WECHSELSTROM

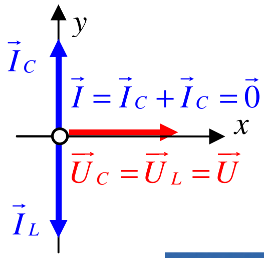
E) Der gedämpfte Sperrkreis, gedämpfter Schwingkreis

1) Vorbereitung





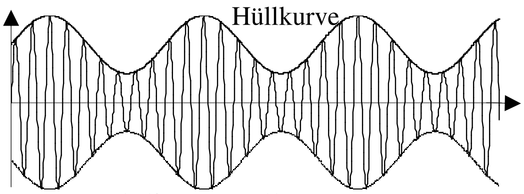
Im Arbeitsblatt W3 wurde die Parallelschaltung von Spule und Kondensator untersucht. Die Schaltung wirkt als Sperrkreis. Ein Wechselstrom mit der Resonanzfrequenz $\omega_{res} = \sqrt{1/L \cdot C}$ kann die Schaltung nicht durchfließen.



Der Gesamtwiderstand der Schaltung, genauer die Impedanz Z, ist für diese Frequenz unendlich groß. Am Zeigerdiagramm sieht man, was geschieht. Während der Strom $\vec{I}_C$ den Kondensator vorwärts durchfließt, durchfließt der gleich große Strom $\vec{I}_L$ die Spule rückwärts. Beim Zusammenfluss an den Knoten heben sich die Ströme auf. Der Gesamtstrom durch die Schaltung ist also *null* und der Widerstand damit *unendlich*.

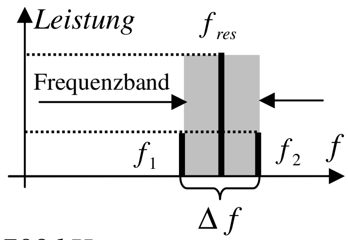
Weil die von außen angelegte Wechselspannung den Strom in eine Schwingungsresonanz versetzt, heißt die besagte Frequenz *Resonanzfrequenz* und die Schaltung wird außer *Sperrkreis* auch *Resonanzkreis* bzw. *Schwingkreis* genannt. Selbst eine kleine *Spannungs*amplitude lässt bei dieser Frequenz einen riesigen *Strom* durch die Schaltung schwingen. Auf Grund dieser Fähigkeit ist diese Schaltung, der Schwingkreis, das Herzstück aller Rundfunksender.
Dazu wird die Schwingkreisspule durch einen gemeinsamen Eisenkern mit einer zweiten Spule induktiv gekoppelt. Die zweite Spule leitet den Wechselstrom dann zum Sendemast. Z.B. erzeugte der Schwingkreis des letzte Berliner Mittelwellensender die Resonanzfrequenz $f_{res} = 693\ kHz$. Wäre das Material des Schwingkreises supraleitend, so würde nur diese eine, ganz scharf definierte Rundfunkwelle abgestrahlt. Der Empfänger würde nur dieses Signal registrieren, aber keine Töne hören.

2) Warum der gedämpfte Schwingkreis?

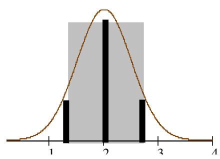


Modulierte Welle

Um nicht nur das Morsealphabet mit „An“ und „Aus“ zu senden, sondern auch Sprache und Musik zu übertragen, wird die Tonfrequenz der Sprache bzw. Musik auf die Hochfrequenzwelle des Senders *aufmoduliert*. Dadurch verbreitert sich die scharfe Resonanzfrequenz auf ein „Frequenzband“ der Breite Δf. Der Kammerton A hat eine Frequenz von $440\,Hz$. Doch auf dem Klavier klingt der Ton anders als auf der Flöte. Die Obertöne, welche die Charakteristik des Tones ausmachen und für das menschliche Ohr noch wahrnehmbar sind, gehen bis zu einer Frequenz von ca. $16\,kHz$. Um diese Frequenz wird die Sendefrequenz durch die Modulation einmal nach oben und einmal nach unten abgeändert. Bei $f_{res} = 693\ kHz$ sind die Grenzen des zu sendenden Frequenzbandes daher $f_1 = 677\,kHz$ und $f_2 = 709\,kHz$.

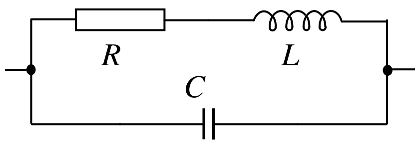


Da für die Frequenzgrenzen auch eine etwas geringerer Sendeleistung ausreicht, gibt es immer noch eine gute Tonübertragung, wenn das „eckige“ Frequenzband durch eine abgerundete „Glockenkurve“ ersetzt wird. Einer solchen Glockenkurve gehorcht die Impedanzkurve des gedämpften Schwingkreises.



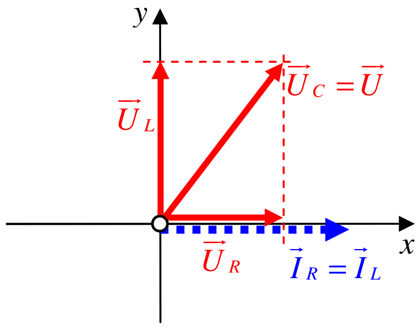
Glockenkurve

3) Zeigerdiagramm des gedämpften Schwingkreises

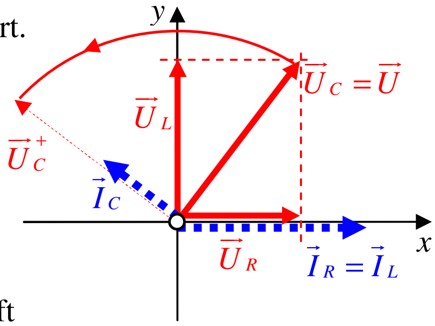


Die Dämpfung des Schwingkreises erfolgt auf natürliche Weise bereits dadurch, dass die reale Spule neben ihrer Induktivität auch stets eine Ohmschen Leiterwiderstand hat. Doch um den Widerstandswert wunschgemäß wählen zu können, schaltet man noch einen Extrawiderstand R vor die Spule und erhält den nebenstehenden Schaltplan.

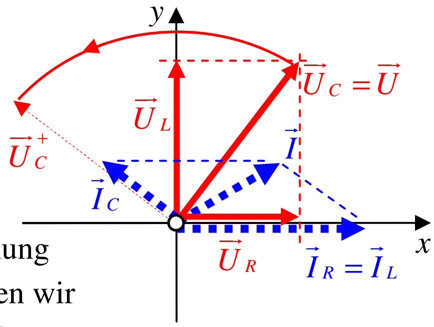
Zeigerdiagramm konstruieren



(a) Als erstes suchen wir nach zwei **gleichen** Größen. Deren gemeinsamer Zeiger wird auf die x-Achse gezeichnet. Hier liegen R und L in Reihe. Deshalb sind die Ströme durch diese Bauteile gleich groß. Der gemeinsame Zeiger $\vec{I}_R = \vec{I}_L$ wird also auf die x-Achse gezeichnet. Am Widerstand ist der Winkel zwischen Spannung und Strom 0°. Deshalb wird $\vec{U}_R$ ebenfalls auf die x-Achse gezeichnet. An der Spule hinkt der Strom der Spannung um 90° nach. Weil $\vec{I}_L$ auf der x-Achse liegt, muss $\vec{U}_L$ auf die positive y-Achse gezeichnet werden. Die Gesamtspannung an R und L erhalten wir durch die Vektoraddition (Kräfteparallelogramm) von $\vec{U}_R$ und $\vec{U}_L$. Wir sehen, die Summe $\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L$ zeigt in den ersten Quadranten. Die Spannung $\vec{U}$ ist aber auch schon die Gesamtspannung der Schaltung und: Da der Kondensator C zur Reihenschaltung von R und L parallel liegt, ist die Spannung $\vec{U}$ auch gleich $\vec{U}_C$.



(b) Wir haben den Zeiger der Kondensatorspannung $\vec{U}_C$ konstruiert. Er liegt im 1. Quadranten. Beim Kondensator eilt der Strom der Spannung um 90° voraus. Also drehen wir hilfsweise den Spannungzeiger $\vec{U}_C$ um 90° vor, erhalten den Hilfszeiger $\vec{U}_C^{\,+}$. Dieser liegt im 2. Quadranten. Nun zeichnen parallel zu $\vec{U}_C^{\,+}$ den Stromzeiger $\vec{I}_C$ des Kondensators.



(c) Der Strom hat in der Parallelschaltung zwei Pfade. Einmal läuft er durch R und L. Der gemeinsame Zeiger $\vec{I}_R = \vec{I}_L$ wurde als Erstes auf die x-Achse gezeichnet. Jetzt haben wir den Strom durch den zweiten Pfad, nämlich durch den Kondensator, konstruiert. In einer Parallelschaltung addieren sich die Ströme zum Gesamtstrom. Also bilden wir die vektorielle Summe aus $\vec{I}_C$ und $\vec{I}_R = \vec{I}_L$. Der Zeiger $\vec{I}$ des Gesamtstroms zeigt wieder in den 1. Quadranten. Weil nun der Zeiger $\vec{U} = \vec{U}_C$ der Gesamtspannung und der Zeiger $\vec{I}$ des Gesamtstromes fertig konstruiert sind, können wir mit der Berechnung beginnen und die Impedanz $Z = \hat{U} / \hat{I}$ ermitteln.

Zeigerdiagramm berechnen

Wir stellen die Zeiger rechnerisch als Vektoren mit zwei Komponenten dar. Deshalb wurden die Zeigergrößen auch immer mit einem Pfeil versehen. Bisher ließen sich die Rechnungen aber auch ohne die Vektorschreibweise ausführen. Wegen der Drehung im obigen Zeigerdiagramm geht das nun nicht mehr. Alle Spannungsvektoren erscheinen jetzt in der Form $\vec{U} = \left(U_x \middle| U_y \right)$.

Entsprechend erscheinen die Stromvektoren in der Form $\vec{I} = \left(I_x \middle| I_y \right)$.

Jetzt wird die Konstruktion rechnerisch nachvollziehen. Es hat sich als günstig erwiesen, alle Zwischenergebnisse in eine Tabelle, den *Zeigerplan*, einzutragen.
Wir geben gleich den fertigen Zeigerplan an und erklären anschließend die einzelnen Schritte.

	Zeigerplan für den gedämpften Schwingkreis.			
	Strom		Spannung	Bemerkung
(1)	$\vec{I}_R = (I_{RL} \| 0)$	(3)	$\vec{U}_R = (R \cdot I_{RL} \| 0)$	I_{RL} unbekannt
(2)	$\vec{I}_L = (I_{RL} \| 0)$	(4)	$\vec{U}_L = (0 \| \omega L \cdot I_{RL})$	
		(5)	$\vec{U} = \vec{U}_C = I_{RL} \cdot (R \| \omega L)$	Hieraus folgt I_{RL}
(7)	$\vec{I}_C = \omega C \cdot I_{RL} (-\omega L \| R)$	(6)	$\vec{U}_C^{+90°} = I_{RL} \cdot (-\omega L \| R)$	
(8)	$\vec{I} = I_{RL} \cdot (1-\omega^2 LC \| \omega CR)$			

(1) Der Zeiger $\vec{I}_R$ wird auf die *x*-Achse gezeichnet. D.h., die *y*-Komponente von $\vec{I}_R$ ist null. Da die *x*-Komponente von $\vec{I}_R$ aber noch unbekannt ist, wird sie einfach mit I_{RL} bezeichnet. Also lautet die Komponentendarstellung $\vec{I}_R = (I_{RL} | 0)$.

(2) Der Zeiger von $\vec{I}_L$ stimmt mit dem von $\vec{I}_R$ überein. Also gilt $\vec{I}_L = (I_{RL} | 0)$

(3) Am Widerstand stimmen die Richtungen von Spannung und Strom überein. Also ist die *y*-Komponente von $\vec{U}_R$ ebenfalls null. Die Läge des Spannungsvektor folgt aus dem Ohmschen Gesetz $\hat{U} = R \cdot \hat{I}$. Da I mit dem unbekannten Wert I_{RL} hat, folgt $\vec{U}_R = (R \cdot I_{RL} | 0)$

(4) Die Spannung läuft dem Strom an der Spule um 90° voraus, sie zeigt in Richtung der positiven *y*-Achse. Also wird die *x*-Komponente I_{RL} von $\vec{I}_L$ in das *y*-Fach geschrieben und gemäß Ohmschen Gesetz $\hat{U} = X_L \cdot \hat{I}$, mit $X_L = \omega \cdot L$ multipliziert. Dann entsteht $\vec{U}_L = (0 | \omega L \cdot I_{RL})$

(5) Die Gesamtspannung $\vec{U}$, welche auch gleichzeitig die Spannung $\vec{U}_C$ am Kondensator ist, ergibt sich durch vektorielle Addition von $\vec{U}_R = (R \cdot I_{RL} | 0)$ und $\vec{U}_L = (0 | \omega L \cdot I_{RL})$ zu $\vec{U} = \vec{U}_C = I_{RL} \cdot (R | \omega L)$, denn I_{RL} kann ausgeklammert werden.

<u>Wichtig</u>: Aus dieser Beziehung folgt die unbekannte Stromstärke I_{RL} , denn $\vec{U}$ ist ja die eingespeiste Wechselspannung, deren Amplitude $\hat{U}$ an Netzgerät eingestellt wird und somit bekannt ist. Wir brauchen demnach nur den Betrag von beiden Seiten von $\vec{U} = I_{RL} \cdot (R | \omega L)$ zu nehmen. Allg. ist der Betrag von $(x | y)$ durch $\sqrt{x^2 + y^2}$. Aus $\vec{U} = I_{RL} \cdot (R | \omega L)$ folgt daher $\hat{U} = I_{RL} \cdot \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$. Also $\boxed{I_{RL} = \hat{U} / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$.

(6) Der Strom läuft der Spannung am Kondensator um 90° voraus. Deswegen drehen wir zunächst den Spannungszeiger um 90° nach vorne und wenden dann das Ohmsche Gesetz an. Nach Arbeitsblatt W2 bewirkt diese Drehung ein Komponententausch und eine Vorzeichenverdrehung: $\vec{P} = (x | y) \to \vec{P}' = (-y | x)$.

Damit geht der Zeiger $\vec{U}_C = I_{RL} \cdot (R | \omega L)$ über in $\vec{U}_C^{+90°} = I_{RL} \cdot (-\omega L | R)$.

(7) Nach dem Ohmschen Gesetz $\hat{I} = \hat{U} / R$, bzw. $\hat{I} = \hat{U} / X_C$ müssen wir jetzt den Strom $\vec{I}_C$ durch den Kondensator berechnen: Wegen $X_C = 1/\omega C$ gilt $1/X_C = \omega C$. D.h., wir müssen den bereits in die richtige Richtung zeigenden Spannungszeiger $\vec{U}_C^{+90°} = I_{RL} \cdot (-\omega L | R)$ mit ωC multiplizieren. Dann erhält man $\vec{I}_C = \omega C \cdot I_{RL} (-\omega L | R)$.

(8) Die Summe des Stromes durch den Kondensator und durch die RL-Reihenschaltung ergibt den Gesamtstrom $\vec{I}$. Doch ehe wir die Summe bilden, formen wir noch um:

Wir erhalten $\vec{I}_C = \omega C \cdot I_{RL}\left(-\omega L \,|\, R\right) = I_{RL}\left(-\omega^2 LC \,|\, \omega RC\right)$

und $\vec{I}_R = \left(I_{RL} \,|\, 0\right) = I_{RL} \cdot \left(1 \,|\, 0\right)$.

Jetzt fällt die Addition leicht: $\vec{I} = I_{RL}\left(-\omega^2 LC \,|\, \omega RC\right) + I_{RL} \cdot \left(1 \,|\, 0\right)$

Also $\vec{I} = I_{RL}\left(-\omega^2 LC \,|\, \omega RC\right) + I_{RL} \cdot \left(1 \,|\, 0\right) = I_{RL} \cdot \left(1 - \omega^2 LC \,|\, \omega CR\right)$.

<u>Berechnung der Stromamplitude:</u>

Die Stromamplitude $\hat{I}$ ist der Betrag des Zeigers $\vec{I} = I_{RL} \cdot \left(1 - \omega^2 LC \,|\, \omega CR\right)$.

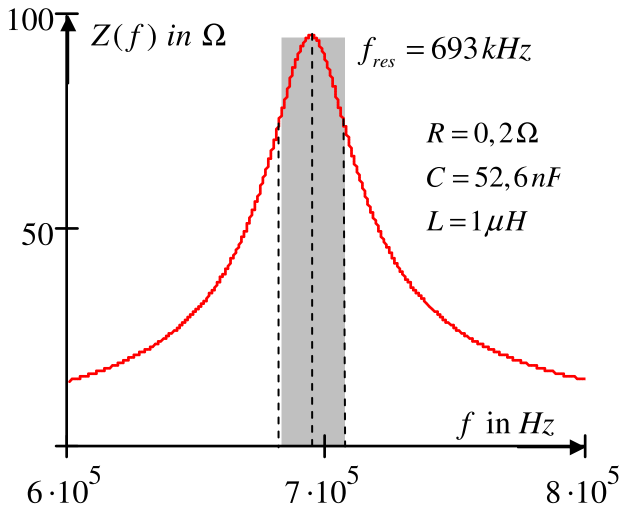
Die Stromstärke $I_{RL} = \hat{U} / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ wurde bereits in (5) ermittelt.

Der Betrag von $\left(1 - \omega^2 LC \,|\, \omega CR\right)$ ist $\sqrt{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega CR\right)^2}$.

Also gilt insgesamt $\hat{I} = \dfrac{\hat{U} \cdot \sqrt{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega CR\right)^2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$.

Damit ergibt sich für die Impedanz des gedämpften Schwingkreises die Formel

$$\boxed{Z(\omega) = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega CR\right)^2}}}$$



Impedanzverlauf des letzten Berliner Mittelwellensenders