# WECHSELSTROM

Fortsetzung von W1 …

e) Spannung- und Stromverlauf bei Widerstand $R$, Kondensator $C$ und Spule $L$.

Die Spule mit der Selbstinduktivität $L$:

Im Arbeitsblatt EM4 haben wir gelernt, dass die tatsächliche Spannung $U$ an einer Spule, welche nach dem Ohmschen Gesetz letztlich für die Stromstärke verabtwortlich ist, eine Überlagerung der Spannung $U_{SQ}$ der Spannungsquelle und der durch die Selbstinduktion entstandenen Gegenspannung $U_{ind}$ ist. Es gilt also $U = U_{SQ} + U_{ind}$. Die induzierte Spannung $U_{ind}$ ergibt sich aus der Änderung $\dot{\Phi}$ des magnetischen Flusses. Da die Querschnittsfläche $A$ der Spule aber konstant ist, beruht $\dot{\Phi}$ nur auf der Flussdichtenänderung $\dot{B}$. Die Flussdichte $B$ wiederum ist proportional zur Stromstärke $I$ durch die Spule. Daher haben wir letztlich eine Proportionalität zwischen der induzierten Spannung $U_{ind}$ und der Änderung $\dot{I}$ der Stromstärke. Der Proportionalitätsfaktor heißt $L$ = Selbstinduktivität. Die Lenzsche Regel bringt ein Minuszeichen. Daher ergibt sich letztlich $U_{ind} = -L \cdot \dot{I}$. Die Selbstinduktivität hängt von der Bauform ab. Es gilt $L = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot A / l$.

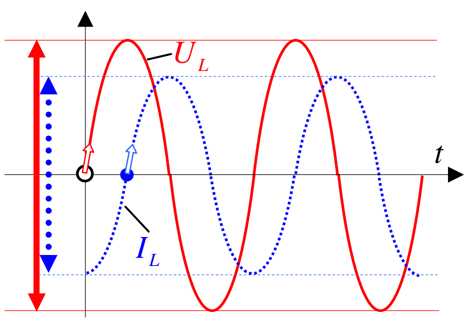
Die Gleichung $U = U_{SQ} + U_{ind}$ geht also über in $U = U_{SQ} - L \cdot \dot{I}$. Mit $U = R \cdot I$ folgt dann $R \cdot I = U_{SQ} - L \cdot \dot{I}$. Für die ideale Spule ist nun aber $R = 0$. Damit haben wir $0 = U_{SQ} - L \cdot \dot{I}$.

Nun wurde gesagt, dass die Spannung $U_{SQ}$ nicht zwingend von einer Spannungsquelle, sondern auch von einem anderen Bauteil kommen kann. Deshalb wurde $U_{SQ}$ durch $U_L$ ersetzt, um anzudeuten, dass $U_L$ die an $L$ angeschlossene Spannung ist. Entsprechend wurde die Stromstärke $I$ als $I_L$ bezeichnet. Damit gilt für die ideale Spule $0 = U_L - L \cdot \dot{I}_L$ bzw. $U_L = L \cdot \dot{I}_L$. Hier darf man nichts verwechseln, denn $U_{ind} = -L \cdot \dot{I}$ und $U_L = +L \cdot \dot{I}_L$. Nun wird die Wechselspannung $U_L = \hat{U} \sin \omega t$ an die Spule angeschlossen. Also gilt $L \cdot \dot{I}_L(t) = \hat{U} \sin \omega t$. Gesucht ist der Stromverlauf $I_L(t)$. In Arbeitsbl. EM4 war gezeigt, durch Integration ergibt sich $\boxed{I_L(t) = -\frac{\hat{U}}{\omega L} \cdot \cos(\omega t)}$.

- Der Faktor vor der Kosinusfunktion ist $\hat{U} / \omega \cdot L$. Die Stromamplitude ist daher $\boxed{\hat{I} = \hat{U} / \omega \cdot L}$.
- Die Minus-Kosinuskurve startet eine Viertel Periode *später* als die Sinuskurve.

Ergebnisse:

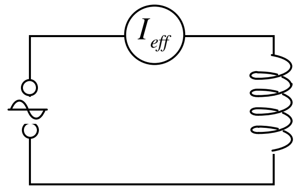
1) An der Spule *hinkt* der Strom der Spannung um eine viertel Periode *nach*.
2) Zu $\hat{U}$ gehört die Stromamplitude $\hat{I} = \hat{U} / \omega \cdot L$.
3) Der *induktive* Widerstand beträgt $\hat{U} / \hat{I} = \boxed{X_L = \omega \cdot L}$.
   Die Maßeinheit von $X_L$ ist wiederum $\Omega$ (Ohm).
   Der induktive Widerstand $X_L$ ist prop. zu $\omega$ und zu $L$.




Je größer die Frequenz *f*, desto größer der induktive Widerstand $X_L$.
Der Grund: Bei hoher Frequenz muss das Magnetfeld permanent auf- und abgebaut werden. Beide Vorgänge stellen wegen der Lenzschen Regel eine Behinderung des Stromflusses dar. Daraus erklärt sich, dass der induktive Widerstand $X_L$ für $f \to \infty$ ebenfalls gegen $\infty$ strebt.

Weil der Ohmsche Widerstand der idealen Spule $R = 0$ ist, fließt ohne die Gegenspannung der Induktion ein unendlich großer Strom. Das geschieht für $f \to 0$ bzw. $\omega \to 0$.
Daraus erklärt sich, dass der induktive Widerstand $X_L$ für $f \to 0$ ebenfalls gegen null strebt.

1) Messung der Induktivität $L$ einer Spule.




Die Induktivität $L$ einer Spule ermittelt man experimentell durch Messung des induktiven Widerstandes $X_L = \omega \cdot L$.
An einem Frequenzgenerator (Wechselspannungsquelle) lässt sich (1) die Frequenz $f$ und (2) der Effektivwert $U_{eff}$ der Spannung einstellen. Das Amperemeter wird auf „Wechselstrom" eingestellt. Man ließt dann den Effektivwert $I_{eff}$ des Stromes ab. Wegen $U_{eff} = \hat{U}/\sqrt{2}$ und $I_{eff} = \hat{I}/\sqrt{2}$ , erhält man den induktiven Widerstand $X_L = \hat{U}/\hat{I} = U_{eff} \cdot \cancel{\sqrt{2}} / I_{eff} \cdot \cancel{\sqrt{2}}$ nicht nur als Quotient der Amplituden, sondern auch als Quotient der Effektivwerte. Durch Einsetzen der Messergebnisse erhält man also $X_L = U_{eff} / I_{eff}$ . Die Induktivität $L$ der Spule ergibt sich dann durch $L = X_L \; / \; \omega$ .

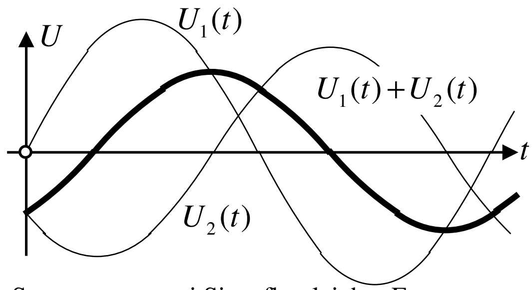
Beispiel: Die Spannungsquelle (der Frequenzgenerator) ist auf $U_{eff} = 100V$ und $f = 2kHz = 2000\,s^{-1}$ eingestellt. Am Amperemeter ließt man $I_{eff} = 4{,}2\,mA$ ab.

Dann folgt $\boxed{L = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{U_{eff}}{I_{eff}}} = \frac{100V}{(2\pi \cdot 2000\,s^{-1}) \cdot 0{,}0042\,A} = 1{,}89 \frac{V \cdot s}{A} = \underline{\underline{4{,}7 \cdot H}}$

## B) Zeigerdarstellung von Wechselspannung und Wechselstrom

1) Problemstellung

Wird eine Schaltung durch eine Wechselspannung der Frequenz $f$ angesteuert, so stellen sich innerhalb der Schaltung Spannungen und Ströme ein, die *sämtlichst auch* Wechselgrößen der Frequenz $f$ sind. Doch stimmen im Allg. weder die Amplituden noch die Phasen mit denen der eingespeisten Größe überein. Zur Berechnung müssen Summen von Wechselgrößen *gleicher* Frequenz, aber *unterschiedlicher* Amplitude und Phase gebildet werden.

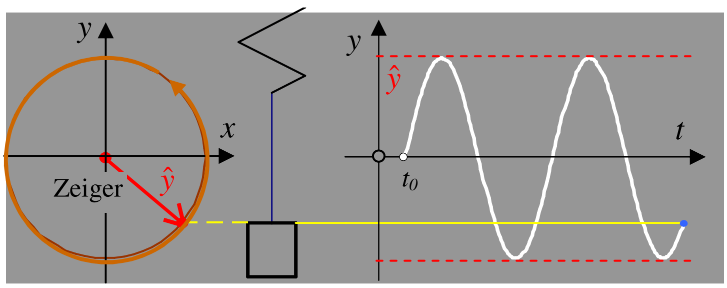


Summe von zwei Sinusfkt gleicher Frequenz

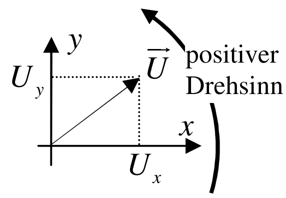
Das gelingt am ein einfachsten mit der **Zeigerdarstellung** der Wechselgrößen.

2) Grundlagen

a) Dreht man einen Nullpunktspfeil, auch *Zeiger* genannt, der Länge $\hat{y}$ während der Schwingungsdauer $T$ einmal in mathematisch positivem Sinn um 360°, so liefert die Projektion der Kreisbewegung den Graphen einer Sinusfunktion mit der Amplitude $\hat{y}$ .

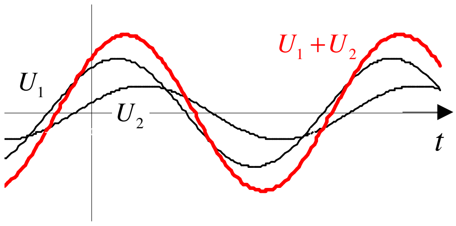


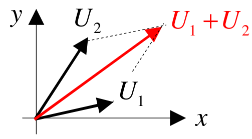

Deshalb lässt sich die Sinusschwingung durch einen rotierenden Zeiger ersetzen. Der Zeiger ist ein zweidimensionaler Vektor.
Um Platz zu sparen schreiben wir die Komponenten neben und nicht untereinander. Die Schreibweise für einen Spannungszeiger ist daher $\vec{U} = \left(U_x \middle| U_y\right)$ und für einen Stromzeiger $\vec{I} = \left(I_x \middle| I_y\right)$ .




b) Für eine phasenverschobene Sinuskurve, welche ihren ersten Nulldurchgang bei $t_0$ hat, muss der Zeiger zum Zeitpunkt $t = 0$ in Richtung des Winkels $\varphi = \frac{360°}{T} \cdot t_0$ zeigen.

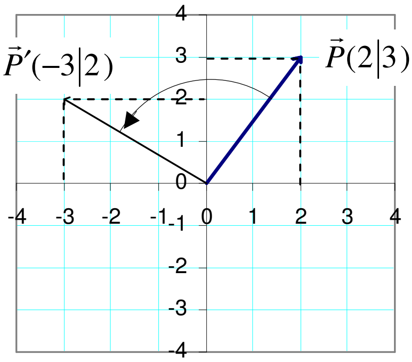
c) Überlagern sich zwei Sinusschwingungen gleicher Frequenz, so ist die Summe wieder eine Sinusschwingung mit dieser Frequenz.



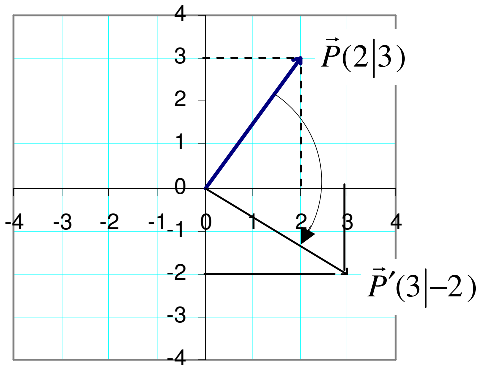

Den Zeiger der Überlagerungsschwingung erhält man graphisch oder rechnerisch durch Vektor-addition $\left(U_{1,x}\middle|U_{1,y}\right)+\left(U_{2,x}\middle|U_{2,y}\right)=\left(U_x\middle|U_y\right)$

3) <u>Phasenverschiebung von $\pm T/4 \;\hat{=}\;$ in der Vektordarstellung einer Drehung um $\pm 90°$</u>




*Drehung* des Zeigers $\vec{P}=(x|\,y)$

um + 90° : $\vec{P}=(x|\,y)\rightarrow \vec{P}'=(-y|\,x)$




*Drehung* des Zeigers $\vec{P}=(x|\,y)$

um - 90°: $\vec{P}=(x|\,y)\rightarrow \vec{P}'=(y|-x)$

Ergebnis:

- Soll ein Zeiger $\vec{P}=(x|\,y)$ um + 90° (vor)gedreht werden, so muss man $y$ in $-y$ umschreiben und die Komponenten anschließend vertauschen.
- Soll ein Zeiger $\vec{P}=(x|\,y)$ um - 90° (zurück) gedreht werden, so muss man $x$ in $-x$ umschreiben und die Komponenten anschließend vertauschen.

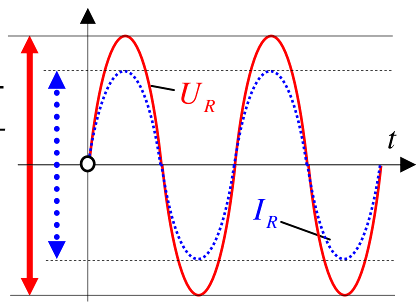
## C) <u>Zeigerdiagrame von Widerstand, Kondensator und Spule im Wechselstromkreis.</u>

### 1) <u>Widerstand *R*</u>

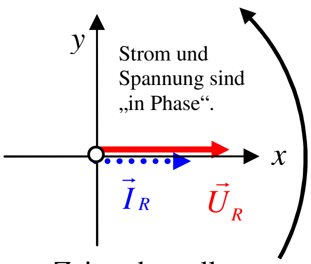
Legt man die Spannung $U(t)=\hat{U}\sin\omega t$ an einen Widerstand *R*, so fließt der *phasengleiche* Strom $I(t)=\hat{I}\cdot\sin\omega t$.

Die Stromamplitude folgt aus dem Ohmschen Gesetz

$\boxed{\hat{I}=\hat{U}/R}$ bzw. $\boxed{\hat{U}=R\cdot\hat{I}}$




<u>Zeitfunktion</u> $I_R(t)$ und $U_R(t)$ in

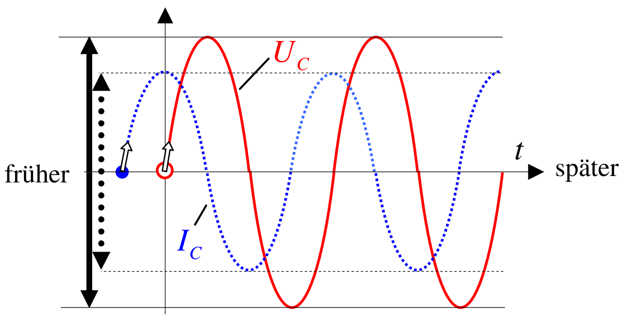



<u>Zeigerdarstellung:</u>

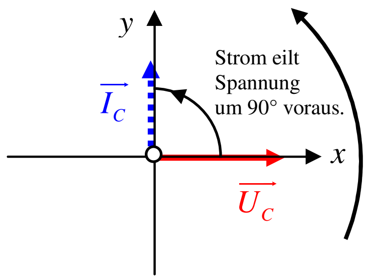
$\measuredangle\left(\vec{U}_R,\vec{I}_R\right)=0°$

### 2) <u>Kondensator mit der Kapazität *C*.</u>

*Am Kondensator eilt der Strom der Spannung um eine viertel Periode voraus .*



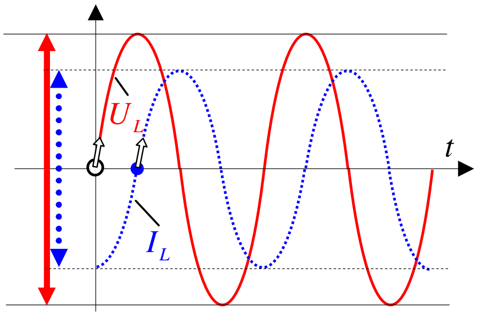

<u>Zeitfunktion</u> $I_C(t)$ eilt $U_C(t)$ um 90° voraus



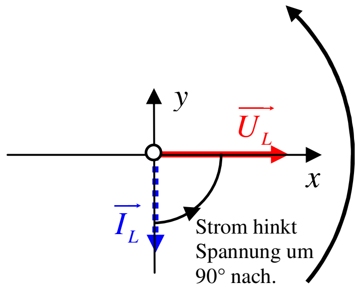

<u>Zeigerdarstellung:</u> $\measuredangle\left(\vec{U}_C,\vec{I}_C\right)=+90°$

3) Spule mit Selbstinduktivität $L$

$\boxed{\textit{An der Spule hinkt der Strom der Spannung um eine viertel Periode nach.}}$




Zeitfunktion $I_L(t)$ hinkt $U_L(t)$ um 90° nach



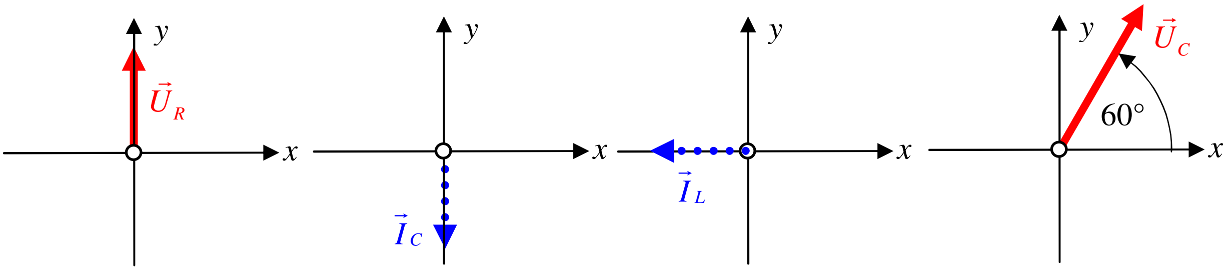

Zeigerdarstellung: $\measuredangle\left(\vec{U}_L, \vec{I}_L\right) = -90°$

## Zusammenfassung

| | Verallgemeinertes Ohmsches Gesetz | Verallgemeinerter Widerstand | Phasendifferenz $\Delta\varphi$ gemessen von $\vec{U}$ nach $\vec{I}$ |
|---|---|---|---|
| Widerstand | $\hat{U}_R = X_R \cdot \hat{I}_R$ bzw. $U_{R,eff} = X_R \cdot I_{R,eff}$ | $X_R = R$ | $\measuredangle\left(\vec{U}_R, \vec{I}_R\right) = 0°$ |
| Kondensator | $\hat{U}_C = X_C \cdot \hat{I}_C$ bzw. $U_{C,eff} = X_C \cdot I_{C,eff}$ | Kapazitiver W. $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ | $\measuredangle\left(\vec{U}_C, \vec{I}_C\right) = +90°$ |
| Spule | $\hat{U}_L = X_L \cdot \hat{I}_L$ bzw. $U_{L,eff} = X_L \cdot I_{L,eff}$ | Induktiver W. $X_L = \omega L$ | $\measuredangle\left(\vec{U}_L, \vec{I}_L\right) = -90°$ |

4) Aufgaben

(1) Gegeben ist jeweils nur ein Zeiger bei $R$, $C$ bzw. $L$. Zeichne den fehlenden Zeiger ein.




(2) äopj

Lösung:

(1)