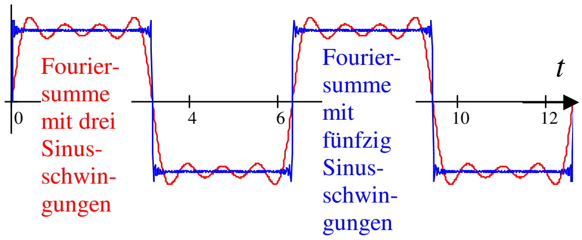
WECHSELSTROM

A) Grundlagen.

a) Bedeutung des Wechselstroms

Wechselstrom entsteht durch periodisches Umpolen der Stromrichtung. Die einfachste Form ist der sinusförmige Wechselstrom. Andere Wechselstromformen, wie die Sägezahn- oder die Rechteckform, können als sog. Fouriersummen von Sinusformen angesehen werden. Deshalb beschäftigen wir uns hier nur mit sinusförmigen Wechselströmen. In der Abb. sieht man, dass die Rechteckform bereits als Überlagerung von drei geeigneten Sinusschwingungen recht gut nachgebildet wird. Bei fünfzig Sinusschwingungen sind die Fehler nur noch an den Ecken sichtbar.



Einphasiger Wechselstrom wird im Dynamo durch eine in einem Magnetfeld rotierende Leiterschleife erzeugt. Dreiphasenwechselstrom (Drehstrom) wird z.B. in der Asynchronmaschine erzeugt.

Unser Stromnetz wird mit $50Hz$ Wechselstrom betrieben. Eine Periode dauert $1/50s^{-1} = 0,02\,s$. Während jeder halben Periode, also während $0,01\,s$, werden die Adern daher von Plus auf Minus und anschließend von Minus auf Plus umgeladen. Die beiden einander gegenüber stehenden Adern des Netzes bilden einen Kondensator. Dieser Netzkondensator wird also permanent umgeladen. Deshalb fließt beim Wechselstrom selbst dann ein *Blindstrom*, wenn kein Verbraucher angeschlossen ist. Dieser Nachteil des Wechselstromes entfällt beim Gleichstrom. Hier brauchen die Adern für die Energieübertragung nur ein einziges mal zu Betriebsbeginn aufgeladen werden.
Der bedeutende Vorteil des Wechselstroms für die Energieübertragung ist seine Transformierbarkeit: Der Spannungswert kann im Transformator leicht an die Erfordernissen angepasst werden. Heute ist dieser Vorteil jedoch z.T. wieder hinfällig, denn Leistungselektronik kann mittlerweile auch Gleichstrom „transformieren". Energiefernübertragung erfolgt heute daher z.B. durch Erdleitungen ohne Blindstromverluste mit Gleichspannungen bis zu mehreren Millionen Volt.

Für die Energieübertragung nimmt die Bedeutung des Wechselstromes also ab.
Doch Daten- und Informationsübertragung beruht grundsätzlich auf Wechselgrößen bzw. auf „An und Aus". Ob digital oder analog, stets ändert sich die Polarität auf den Adern.
Der Frequenzbereich des Wechselstroms erstreckt sich von einigen Hertz über den *NF* (Niederfrequenz-), *MF* (Mittelfrequenz-) und *HF* (Hochfrequenzbereich) bis zu *GHz* und *THz*.

b) Funktionsgleichung, Amplitude, Frequenz, Nulldurchgang, Phasenverschiebung.

Die Funktionsgleichungen von sinusförmigem Wechselstrom und Wechselspannung lauten
$I(t) = \hat{I} \sin\,\omega(t - t_{0,I})$ und $U(t) = \hat{U} \sin\omega(t - t_{0,U})$.

Die Vorfaktoren $\hat{I}$ bzw. $\hat{U}$ heißen Strom- bzw. Spannungs*amplitude*. Sie geben die maximale Ausschlagsweite in Plus- und Minusrichtung an. Für die Kreisfrequenz ω (omega) gilt $\omega = 2\pi f$.

Dabei ist $f = 1/T$ die Frequenz in Hertz $Hz = s^{-1}$ und T die Schwingungsdauer in s.

Die Kreisfrequenz ω unterscheidet sich von der Frequenz f nur durch den Zahlenfaktor $2\pi \approx 6,28$. ω hat daher ebenfalls die Maßeinh. $Hz = s^{-1}$. Zu $f = 50\,Hz$ gehört z.B. $\omega = 314,16\,Hz$.

Der „ersten" Nulldurchgänge von $I(t)$ bzw. $U(t)$ findet zu den Zeitpunkten $t_{0,U}$ bzw. $t_{0,I}$ statt. Für $t_{0,U} \neq t_{0,I}$ sind Strom und Spannungen gegeneinander um $\Delta\varphi = \omega\cdot(t_{0,U} - t_{0,I})$ phasenverschoben.

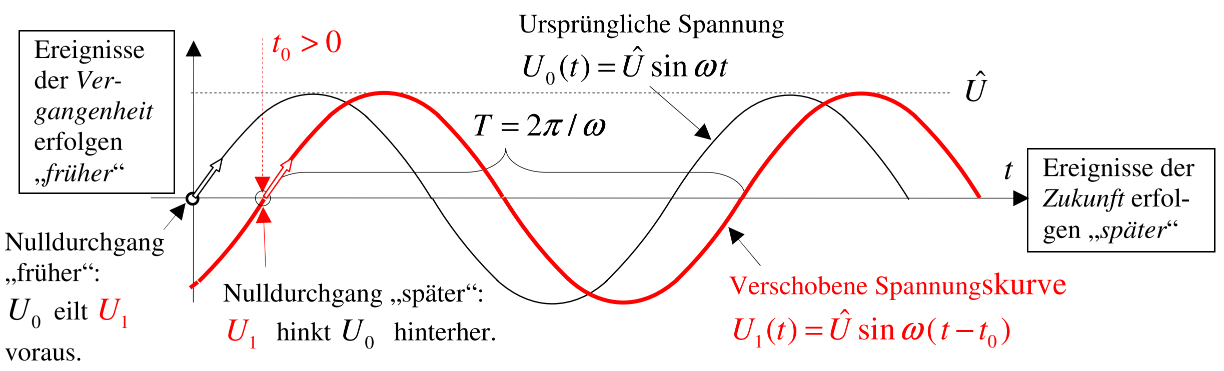
Für die graphische Darstellung der Zeitverläufe von Strom und Spannung wird die Zeit t auf der Abszisse (x-Achse) und $I(t)$ bzw. $U(t)$ auf der Ordinate (y-Achse) abgetragen.

Die sog. „230 Volt Wechselspannung aus der Steckdose" hat die Amplitude $\hat{U} \approx 325\,Volt$ (den Grund dafür lernen wir später). Ihre Frequenz beträgt $f = 50\,Hz = 50\,s^{-1}$. Ihre Kreisfrequenz beträgt somit $\omega = 2\pi f \approx 314,16\,Hz$ und die Schwingungsdauer hat den Wert $T = 1/f = 0,02\,s$.

c) <u>Vorauseilen und Nachhinken: Vergleich von</u> $U_1(t) = \hat{U}\sin\omega(t - t_0)$ <u>mit</u> $U_0(t) = \hat{U}\sin\omega t$.

Die Finktion $U_0(t) = \hat{U}\sin\omega t$ hat ihren „ersten“ Nulldurchgang bei $t = 0$. Dort steigt sie an.

Für $t_0 > 0$ hinkt $U_1(t) = \hat{U}\sin\omega(t - t_0)$ hinter $U_0(t)$ her. $U_0(t)$ eilt umgekehrt $U_1(t)$ voraus.



d) <u>Spannung, Strom, Leistung, Effektivwerte</u>

<u>1-ter Fall: Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung ist *null*</u>

Beim Ohmschen Widerstand sind Strom und Spannung „*in Phase*“, hier gilt $\Delta t_0 = t_{0,I} - t_{0,U} = 0$.
Die Nulldurchgänge von Strom und Spannung fallen beim Ohmschen Widerstand also zusammen.
Zur Vereinfachung wählen wir $t_{0,I} = 0$ und $t_{0,U} = 0$. Also $U(t) = \hat{U}\sin\omega t$ und $I(t) = \hat{I}\sin\omega t$.

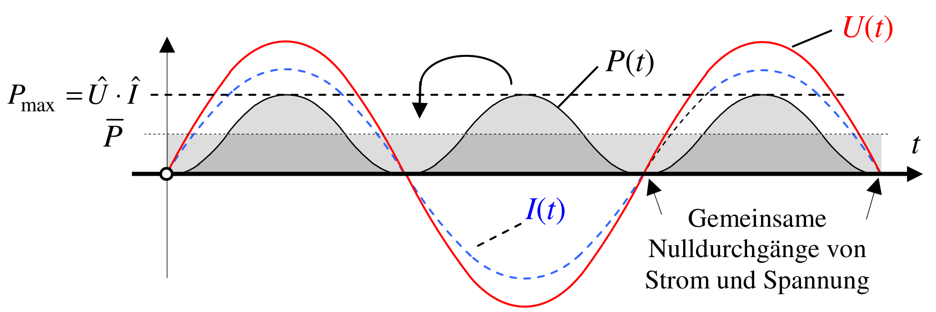
Wir beachten noch, dass auch für die Amplituden das Ohmsche Gesetz $\hat{I} = \hat{U}/R$ gilt.

Frage: Wie groß muss die Spannungsamplitude $\hat{U}$ sein, damit der Wechselstrom (im Mittel) die gleiche Leistung überträgt wie ein Gleichstrom mit der gegebenen Spannung $\bar{U}$?

Antwort: Grundsätzlich gilt für die Leistung $\boxed{P = U \cdot I}$.

Wir betrachten zunächst einen Gleichstromkreis mit Spannung $\bar{U}$ und Widerstand *R*. Für die Stromstärke folgt $\bar{I} = \bar{U}/R$. Einsetzen ergibt für die Gleichstromleistung $\bar{P} = \bar{U} \cdot (\bar{U}/R) = \underline{\underline{\bar{U}^2/R}}$.

Dieser Leistungswert soll jetzt (im Mittel) in einem Wechselstromkreis mit $U(t) = \hat{U}\sin\omega t$, $I(t) = \hat{I}\sin\omega t$ $\hat{U}$ und Widerstand R geliefert werden. Weil Spannung und Strom jetzt Zeitfunktionen sind, muss der U - und der I - Wert für jeden Zeitpunkt multipliziert werden.



Durch „Abschneiden“ der „Kuppen“ und „Einlegen“ in die „Täler“ erhält man den zeitlichen Mittelwert $\bar{P}$ der Leistung.

Die Abb. zeigt, dass $P(t) = U(t) \cdot I(t)$ stets ≥ 0 ist. $P(t)$ pendelt zwischen *null* und $\hat{U} \cdot \hat{I}$ hin und her. Im Mittel beträgt die Leistung daher $P_{Mittel} = ½ \cdot \hat{U} \cdot \hat{I} = ½ \cdot \hat{U} \cdot \left(\hat{U}/R\right) = \underline{\underline{½ \cdot \left(\hat{U}^2/R\right)}}$.

Gleichsetzen von P_{Mittel} und $\bar{P} = \bar{U}^2/R$ ergibt $\bar{U}^2/R = ½ \cdot (\hat{U}^2/R)$. Daraus folgt $\hat{U} = \sqrt{2} \cdot \bar{U}$.

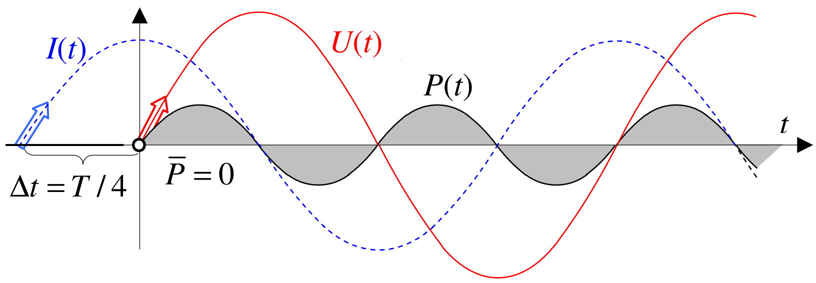
<u>Ergebnis</u>: Die Wechselspannungsamplitude muss $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ mal größer sein als der Gleichspannungswert, um die gleiche Leistung zu übertragen.

<u>Beispiel</u>: Bei $\bar{U} = 230V$ wird die Wechselspannungsamplitude $\hat{U} = \sqrt{2} \cdot 230V \approx 325{,}3V$ benötigt, um eine der Gleichspannungsleistung entsprechende Leistung zu übertragen.

Die Gleichspannung $\bar{U} = \hat{U} / \sqrt{2}$ ist also bzgl. der Energieübertragung genauso „effektiv“ wie die Wechselspannung $\hat{U}$. Deshalb wird $\hat{U} / \sqrt{2}$ als „Effektivwert“ der Wechselspannung $\hat{U}$ bezeichnet. **Also:** $\boxed{U_{\text{eff}} = \hat{U} / \sqrt{2}}$ entsprechend gilt $\boxed{I_{\text{eff}} = \hat{I} / \sqrt{2}}$. Bzw.: $\boxed{\hat{U} = U_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2}}$ und $\boxed{\hat{I} = I_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2}}$ Die Amplituden müssen für den „gleichen Effekt“um $\sqrt{2}$ vergrößert werden.

<u>2. Fall: Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung = ±90° bzw. ± T / 4</u>

Erfolgen die „ersten“ Nulldurchgänge um eine Viertel Periode $\pm T/4$ zeitversetzt, so schwankt das Produkt $P(t) = U(t) \cdot I(t)$ um die t-Achse, sodass der Mittelwert über eine Periode *null* ist. Der Verbraucher nimmt daher im Mittel *keine* Leistung auf. *Dennoch* flutet Leistung zwischen Generator und „Verbraucher“ hin und her und belastet die Leitungen des Stromkreises.

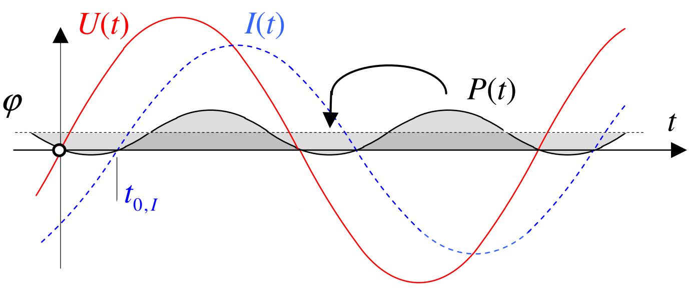


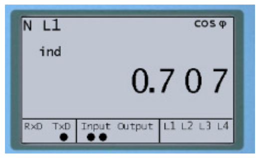
Weil Spannung und *Strom* bei einer Phasenverschiebung von 90° bzw. $T/4$ keine Leistung übertragen, wird der Strom **Blindstrom** genannt.

<u>3. Fall: Wirkleistung bei beliebigem Phasenwinkel</u>

Die volle Zeitperiode T entspricht dem Phasenwinkel $360°$. Sind die „ersten“ Nulldurchgänge um einen beliebigen Wert Δt_0 zeitversetzt, so entspricht das einer Phasenwinkeldifferenz $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t_0 = (\Delta t_0 / T) \cdot 2\pi$, bzw. $\Delta\varphi = (\Delta t_0 / T) \cdot 360°$. Sind Spannung und Strom z.B. um $\Delta t_0 = T/3$ zeitversetzt, so entspricht das einer *Phasenverschiebung* von $\Delta\varphi = 120°$. Bei beliebigem ΔT mittelt sich die Leistungskurve $P(t) = U(t) \cdot I(t)$ i.A. nicht weg. In der Abb. bleibt ein von Null verschiedener Mittelwert übrig. Dieser Mittelwert wird *Wirkleistung* P_W genannt

$\bar{P} = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi$





Datenblatt mit Angabe der Phasenverschiebung.

Mit Hilfe der Additionstheoreme (10.Klasse) kann man für die **Wirkleistung** folgende Formel herleiten. $\boxed{P_W = U_{eff}\, I_{eff} \cdot \cos\Delta\varphi}$

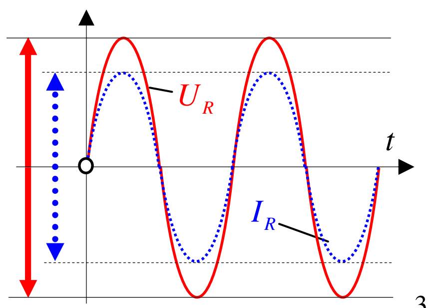
Im Datenblatt von z.B. Elektromotoren wird der **Leistungsfaktor** „cos φ“-Wert angegeben.

e) <u>Spannung- und Stromverlauf bei Widerstand R , Kondensator C und Spule L.</u>

<u>Der Widerstand mit dem Widerstandswert R:</u>

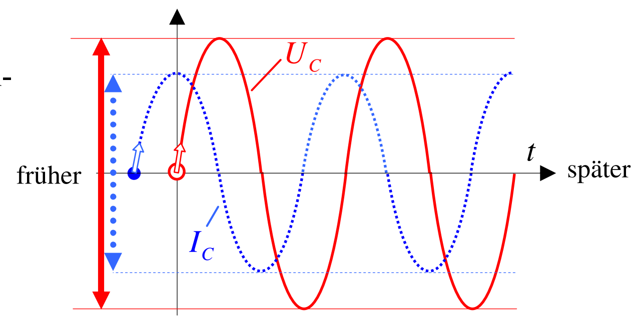
Legt man die Spannung $U(t) = \hat{U} \sin\omega t$ an einen Widerstand R, so fließt der *phasengleiche* Strom $I(t) = \hat{I} \cdot \sin\omega t$. Die Stromamplitude folgt aus dem Ohmschen Gesetz $\boxed{\hat{I} = \hat{U} / R}$ bzw. $\boxed{\hat{U} = R \cdot \hat{I}}$.

Die Phasenverschiebung beträgt $\boxed{\Delta\varphi = 0°}$



Der Kondensator mit der Kapazität C:

Legt man an einen Kondensator die Wechselspannung $U(t) = \hat{U}\sin\omega t$, so ist die elektrische Ladung $Q(t)$ gemäß der Gleichung $Q(t) = C \cdot U(t)$ *auch* eine Zeitfunktion. Proportional zum jeweiligen U-Wert fließt also Ladung auf die Platten auf und ab. Das Auf- und Abfließen der Ladung erfolgt durch einen elektrischen Strom in den Zuleitungen. Strom ist aber „Änderung von Ladung pro Zeit", also $I = \Delta Q / \Delta t$. Beim kontinuierlichen Vorgang wird daraus die erste Ableitung $I = \dot{Q}$. Also müssen wir $Q(t) = C \cdot \hat{U}\sin\omega t$ ableiten, um den Stromverlauf zum Umladen der Kondensatorplatten zu erhalten. Da $(\sin\omega t)^{\cdot} = \omega \cdot \cos\omega t$ gilt, ergibt sich $I(t) = C \cdot \dot{U}(t) = C \cdot \omega \cdot \hat{U} \cdot \cos\omega t$



- Der Faktor vor der Kosinusfunktion ist $C \cdot \omega \cdot \hat{U}$. Also gilt für die Stromamplitude $\hat{I} = C \cdot \omega \cdot \hat{U}$.
- Die Kosinuskurve startet aber eine Viertel Periode früher als die Sinuskurve.

Ergebnisse:

1) Am Kondensator eilt der Strom der Spannung um eine viertel Periode voraus.
2) Hat der Spannungsverlauf die Amplitude $\hat{U}$, so hat der Stromverlauf die Ampl. $\hat{I} = C \cdot \omega \cdot \hat{U}$.
3) Beim Ohmschen Widerstand erhält man den Widerstandswert R durch den Quotienten aus der Spannungsamplitude $\hat{U}$ geteilt durch die Stromamplitude $\hat{I}$.

   Bildet man hier auch $\frac{\hat{U}}{\hat{I}}$, so erhält man den *kapazitiven Widerstand* $\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \boxed{X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}}$

   Die Maßeinheit des *kapazitiven Widerstand* ist ebenfalls Ω (Ohm).

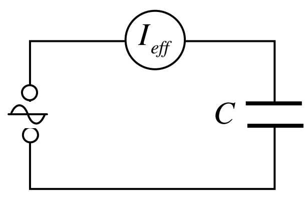
   Der kapazitive Widerstand X_C ist antiproportional zu ω und zu C.

   Je größer die Frequenz, desto kleiner der kapazitive Widerstand. Der Grund: Bei hoher Frequenz müssen die Kondensatorplatten sehr oft umgeladen werden. Dafür muss viel Strom fließen. Viel Strom bei gleicher Spannung heißt aber *geringer Widerstand*.

   Für hohe Frequenzen ist der Kondensator praktisch „durchlässig", nur die Phasenverschiebung verbleibt. Umgekehrt: Für $\omega \to 0$ (bzw. $f \to 0$) stellt der Kondensator einfach nur eine Leitungsunterbrechung dar, wodurch der Widerstand für $\omega \to 0$ gegen unendlich geht.

4) Messung der Kapazität durch Messung des kapazitiven Widerstandes

   Die Kapazität C eines Kondensators ermittelt man meist durch Messung des kapazitiven Widerstandes $X_C = 1/\omega \cdot C$.



   An einem Frequenzgenerator (Wechselspannungsquelle) lässt sich (1) die Frequenz f und (2) der Effektivwert U_{eff} der Spannung einstellen. Das Amperemeter wird auf „Wechselstrom" eingestellt. Man ließt dann den Effektivwert I_{eff} des Stromes ab. Wegen $U_{eff} = \hat{U}/\sqrt{2}$ und $I_{eff} = \hat{I}/\sqrt{2}$, erhält man den kapazitiven Widerstand $X_C = \hat{U}/\hat{I} = U_{eff} \cdot \cancel{\sqrt{2}} / I_{eff} \cdot \cancel{\sqrt{2}}$ nicht nur als Quotient der Amplituden, sondern auch als Quotient der Effektivwerte. Durch Einsetzen der Messergebnisse erhält man also $X_C = U_{eff} / I_{eff}$. Die Kapazität des Kondensators ergibt sich dann durch $C = 1 \;/\; \omega \cdot X_C$.

   Beispiel: Die Spannungsquelle (der Frequenzgenerator) ist auf $U_{eff} = 100V$ und $f = 200\,Hz = 200\,s^{-1}$ eingestellt. Am Amperemeter ließt man $I_{eff} = 591\,mA$ ab.

   Dann folgt $\boxed{C = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{I_{eff}}{U_{eff}}} = \frac{0{,}591\,A}{(2\pi \cdot 200\,s^{-1}) \cdot 100V} = 4{,}7 \cdot 10^{-6}\,\frac{A \cdot s}{V} = \underline{\underline{4{,}7 \cdot \mu F}}$