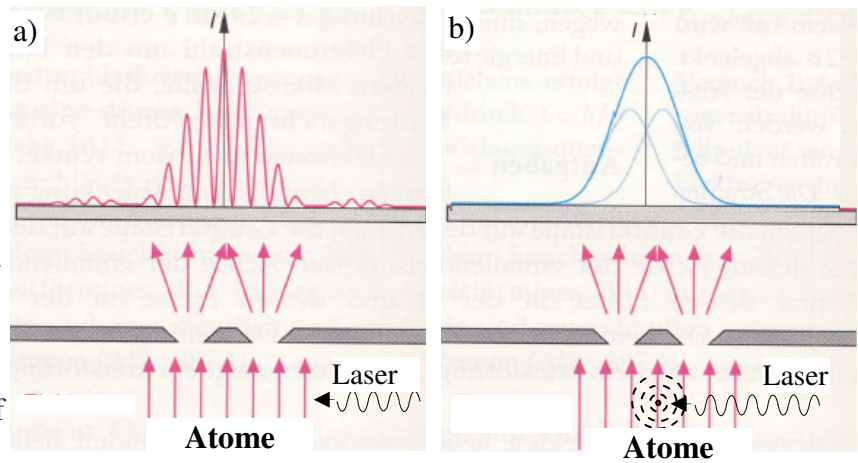


1) Das Interferenzbild verschwindet, wenn die Teilchen unterscheidbar bzw. lokalisierbar sind.

Im Arbeitsblatt **Quanten5** haben wir gelernt, dass sich hinter dem lichtbestrahlten Doppelspalt zwei Teilwellen des Lichtes so überlagern, dass die Funktionswerte der Summe auf dem Schirm Maxima und Minima ausbilden. Aus diesen Funktionswerten errechnen sich dann die Wahrscheinlichkeiten für die Aufschlagsorte der Photonen. Das Zufallsprinzip beim punktwweisen Zustandekommen des Interferenzbildes hingegen beruht nicht auf den Werten der Welle, sondern auf der Ununterscheidbarkeit der Photonen, sofern diese *derselben* einfarbigen Lichtwelle entstammen.

Doch nicht nur die Photonen einer *einfarbigen* Lichtwelle sind ununterscheidbar, sondern auch ganze Atome, sofern sie sämtlichst im *gleichen* Zustand, z.B. im Grundzustand, sind. Deshalb erhält man auch mit entsprechenden Atomen Interferenzbilder. Das heißt aber nicht, dass sich Atome gegenseitig auslöschen bzw. verstärken. Es heißt nur, dass die Atome auf dem Schirm dort bevorzugt auf-



treffen, wo die „Wellenfunktion der Atome“ Maxima hat. Das ist in Abb. a) dargestellt.

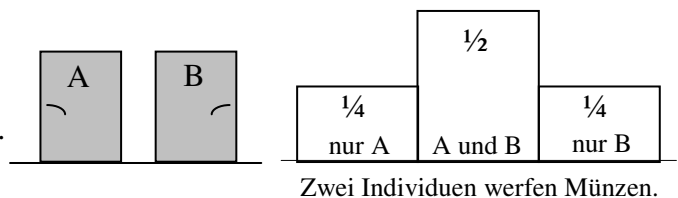
Nun wird der Versuch abgeändert: Abb b) zeigt, dass die „Atomwelle“ vor dem Eintritt in den Doppelspalt mit einer *zweiten* Welle (Laser) bestrahlt wird. Durch die Bestrahlung geraten etliche der Atome in angeregte Zustände. Die aufgenommene Energie strahlen sie anschließend wieder ab. Was folgt daraus? Durch die Energieaufnahme werden viele der Atome erstens voneinander unterscheidbar und zweitens kann man sie (im Prinzip) durch Auswertung der Abstrahlungsrichtungen orten. Die Unterscheidbarkeit *zerstört* den Zufall. Die Ortsbestimmung verrät, durch welchen der beiden Spalte die Atome laufen. Durch die Bestrahlung mit der zweiten Welle bricht somit das Interferenzbild zusammen. Es sieht es eher so aus, als würden die Spalte nacheinander geschlossen und die beiden Teilresultate anschließend addiert. Das Versuchsergebnis bestätigt, dass nur Teilchen *einer* Welle voneinander ununterscheidbar sind und nur diese zueinander „Quantenobjekte“ mit Interferenz werden können. Selbst riesige Moleküle lassen sich heute zur Interferenz bringen.

2) Ununterscheidbarkeit und fehlende Individualität der Elementarteilchen ändert die Statistik.

Elementarteilchen gleicher Sorte, wie Photonen, Elektronen aber sogar Atome und Moleküle im gleichen Zustand sind identisch und haben keine Individualität. Wir bezeichnen sie als „Quantenobjekte“. Mehrere gleicher Sorte können ein Interferenzbild erzeugen. Doch Quantenobjekte können noch mehr. Durch ihre Ununterscheidbarkeit und Nichtindividualität ändern sie die Statistik.

Das soll an einem Beispiel erläutert werden:

Stellen wir uns vor, dass zwei Personen für eine Nacht in einem Hotel Quartier suchen. Der Wirt bietet ihnen die Zimmer A und B an. Da sie sich nicht entscheiden können, werfen sie Münzen. Bei „Kopf“ muss man in Zimmer A, bei „Zahl“ muss man in Zimmer B. Werfen beide „Kopf“, so gehen beide in Zimmer A. Werfen beide „Zahl“, so gehen beide in Zimmer B. Wirft eine Person „Kopf“ und die andere „Zahl“ oder umgekehrt, so werden beide Zimmer genutzt. Es gibt also die vier möglichen Ergebnisse (A, A), (A, B), (B, A) und (B, B). Die beiden Ergebnisse (A, B) und (B, A) führen zur Nutzung beider Zimmer. Der Wirt sieht nach der Abreise, welche Zimmer benutzt wurden. Zu 25% wurde nur Zimmer A benutzt. Ebenso wurde zu 25% nur Zimmer B benutzt. Zu 50% wurden beide Zimmer genutzt. Der Wirt muss also zu 50% beide Zimmer putzen. Auch mit vollkommen identischen Münzen würden zwei Personen, bzw. zwei Individuen, die 1/4, 1/2, 1/4 Verteilung werfen, sie können ja einfach für beide Würfe dieselbe Münze verwenden.



Das soll an einem Beispiel erläutert werden: Stellen wir uns vor, dass zwei Personen für eine Nacht in einem Hotel Quartier suchen. Der Wirt bietet ihnen die Zimmer A und B an. Da sie sich nicht entscheiden können, werfen sie Münzen. Bei „Kopf“ muss man in Zimmer A, bei „Zahl“ muss man in Zimmer B. Werfen beide „Kopf“, so gehen beide in Zimmer A. Werfen beide „Zahl“, so gehen beide in Zimmer B. Wirft eine Person „Kopf“ und die andere „Zahl“ oder umgekehrt, so werden beide Zimmer genutzt. Es gibt also die vier möglichen Ergebnisse (A, A), (A, B), (B, A) und (B, B). Die beiden Ergebnisse (A, B) und (B, A) führen zur Nutzung beider Zimmer. Der Wirt sieht nach der Abreise, welche Zimmer benutzt wurden. Zu 25% wurde nur Zimmer A benutzt. Ebenso wurde zu 25% nur Zimmer B benutzt. Zu 50% wurden beide Zimmer genutzt. Der Wirt muss also zu 50% beide Zimmer putzen. Auch mit vollkommen identischen Münzen würden zwei Personen, bzw. zwei Individuen, die 1/4, 1/2, 1/4 Verteilung werfen, sie können ja einfach für beide Würfe dieselbe Münze verwenden.

Im Umkehrschluss sieht der Wirt also am Auftreten der  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  Verteilung, dass *zwei* Personen am Werke waren. Jetzt ersetzen wir die beiden Personen durch zwei ununterscheidbare Elektronen und tun so, als ob diese ebenfalls Münzen werfen könnten. Tritt zweimal A auf, so ist klar, dass beide Elektronen A geworfen haben. Tritt aber einmal A und einmal B auf, so weiß man absolut nicht, welches Elektron welches Ergebnis erzielt hat, es könnte stets auch das andere gewesen sein. Bei Nichtindividuen kennt man daher nur die Ergebnismenge  $\{A, B\}$  (bei Mengen ist die Reihenfolge egal,  $\{B, A\} = \{A, B\}$ ). Bei zwei Elektronen muss man sich von dem Gedanken verabschieden, dass eine Aussage über einzelne Elektronen möglich wäre. Die beiden Elektronen bilden einfach nur *ein* quasi „symbiotisches Liebespaar“, man sagt: „Die beiden Elektronen sind *verschränkt*“. Individuen können sich in den *vier* geordneten Paaren  $(A, A)$ ,  $(A, B)$ ,  $(B, A)$  und  $(B, B)$  anordnen. Das verschränkte Elektronenpaar hingegen kann sich nur in den *drei* gleichwertigen Ergebnismengen  $\{A, A\}$ ,  $\{B, B\}$  und  $\{A, B\}$  anordnen. Dadurch geht die  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  Verteilung für Individuen in die  $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$  Verteilung für Nichtindividuen über. Es entsteht eine neue Statistik

Wir wissen, dass die *Ununterscheidbarkeit* der Photonen beim Doppelspalt den *Zufall* des Auftreffortes erzwingt und dass eine *Abweichung* von diesem Zufall ein Hinweis auf *Unterscheidbarkeit* der Photonen liefern würde, was nicht der Fall ist.

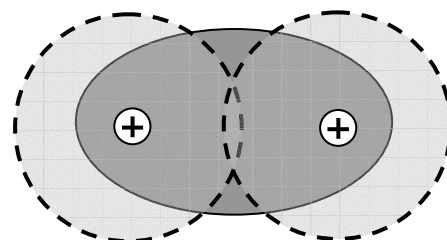
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
nur A	A und B	nur B

Zwei Nichtindividuen werfen Münzen

Ganz entsprechend sorgt hier die *Nichtindividualität* der „münzewerfenden Elektronen“ für absolute *Gleichverteilung* der Ergebnisse. Selbst bei einer abgeschwächten  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  Verteilung wüsste der Wirt sofort, dass Individuen und nicht „Nichtindividuen“ die Münzen geworfen haben. Der Spitzenwert  $\frac{1}{2}$  für unterscheidbare Teilchen sinkt also auf  $\frac{1}{3}$  für identische Teilchen. Im verschränkten Zustand nutzt das Elektronenpaar die beiden getrennten Zimmer A und B also seltener, als wenn sie unterscheidbar wären. Die geänderte Statistik hat übrigens erhebliche Auswirkungen auf das thermodynamische Verhalten von Gasen gleicher Teilchen. Dass wir Menschen eine andere Statistik erleben als die Elektronen liegt letztlich an unserem Bewußtsein, zwischen „ich und du“, zwischen „mein und dein“ unterscheiden zu können.

### 3) Die Ununterscheidbarkeit der Elektronen erzeugt die kovalente chemische Bindung.

Man kann das Beispiel der beiden Hotelzimmer auf das Wasserstoffmolekül  $H_2$  übertragen und so die kovalente chemische Bindung in dem Molekül veranschaulichen: Die Zimmer A und B entsprechen den beiden Atomkernen des Moleküls. Dass sich beide Elektronen im „Zimmer“ A bzw. in „Zimmer“ B befinden, ist wegen ihrer gegenseitigen Abstoßung fast auszuschließen. Also geht es nur um den Fall AB, dass *beide* „Zimmer“ genutzt werden. Gehen wir gedanklich zunächst von unterscheidbaren Elektronen aus. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass jedes der Elektronen an einem der Atomkerne sitzt maximal. Die negativen Elektronen „fühlen sich an ihren Kernen recht wohl“, denn sie werden ja von diesen angezogen. Die Situation entspricht einfach zwei getrennten Wasserstoffatomen mit je einem Atomkern und einem Elektron. Es gibt insofern keinen Anlass, dass sich die beiden Atome zu einem Molekül verbinden sollten. Das wird erst anders, wenn wir beachten, dass die beiden Elektronen *ein* verschränktes Elektronenpaar bilden. Denn dann *sinkt* die Wahrscheinlichkeit in *getrennten* „Zimmern“ A und B zu sein auf einen niedrigeren Wert. Das Elektronenpaar verlässt somit die Kerne teilweise. Es wandert entweder nach außen oder nach innen. Den bindenden Zustand nimmt das Elektronenpaar dann ein, wenn es sich zwischen den Kernen verdichtet. Dann zieht das Elektronenpaar beide Kerne zu sich und hält sie zusammen. Es ist wirklich kurios: Ohne die Ununterscheidbarkeit würden die meisten Moleküle nicht existieren.



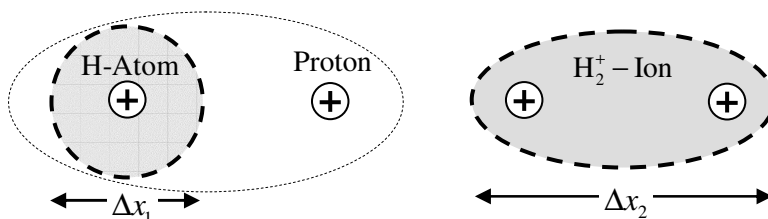
Somit haben wir drei wichtige physikalische Sachverhalte kennen gelernt, die auf der Ununterscheidbarkeit identischer Teilchen beruhen:

- Das Zufallsprinzip beim Zustandekommen des Interferenzbildes.
- Das geänderte thermodynamische Verhalten von Gasen gleicher Teilchen.
- Die kovalente chemische Bindung.

4) Auch die Heisenbergsche Unbestimmtheits-Relation erklärt die Chemische Bindung.

Das einfachst mögliche Molekül ist das Wasserstoffmolekül-Ion  $H_2^+$ . Es besitzt nur ein einziges Elektron, so dass die chemische Bindung hier nicht mit der Ununterscheidbarkeit von zwei Elektronen erklärt werden kann. Trotzdem wird die chemische Bindung auch in diesem Fall durch die Quantentheorie verständlich. Vor der Entdeckung dieser Theorie hatte man keine Ahnung, was „die Welt im Innersten zusammenhält“. Die Meinung war, dass sich alle Atome, physikalisch gesehen, wie Edelgase verhalten müssten und dass der Zusammenhalt auf einer völlig anders gearteten Kraft beruht. Die Kraft hieß „Lebenskraft“. Sie wäre es, die die Atome zusammenhält und der „toten Materie“ das Leben einhaucht. Daher ist das  $H_2^+$ -Molekülion von großer historischer Bedeutung, denn an diesem zusammengesetzten System wurde erstmals per Quantentheorie nachgewiesen, dass die chemische Bindung *physikalisch* erklärbar ist. Noch heute ist das  $H_2^+$  von Interesse. Es befindet sich in großen Mengen im interstellaren Raum und ist Bestandteil des Sonnenwindes. Ohne große Rechnung kann die chemische Bindung des  $H_2^+$  mit der Heisenbergsche Unbestimmtheits-Relation verständlich gemacht werden.

Dazu verwenden wir die Form  $\Delta x \cdot \Delta p \approx h$ , wobei  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum ist.  $\Delta x$  kennzeichnet den Aufenthaltsbereich des Elektrons und  $\Delta p = m \cdot \Delta v$  gibt an, welchen Bewegungsspielraum das Elektron hat.



Zunächst betrachten wir in der linken Abb. ein Wasserstoffatom und ein davon getrenntes Proton. Der Aufenthaltsbereich entspricht dann der Größe des H-Atoms, sodass  $\Delta x_1 \approx 25 \text{ pm}$  beträgt. In der rechten Abb. umschließt der Aufenthaltsbereich des Elektrons beide Kerne in dem Molekül. Es gilt etwa  $\Delta x_2 \approx 75 \text{ pm}$ . Da sich der Aufenthaltsbereich um den Faktor 3 vergrößert, nimmt die mittlere Geschwindigkeit um den Faktor 3 ab. Damit erniedrigt sich die kinetische Energie des Elektrons bei der Bildung des Moleküls erheblich. Wegen der niedrigeren Energie ist das  $H_2^+$ -Molekül daher stabiler als die getrennte Anordnung.  $H + p$ .

5) Die Materiewelle von De Broglie

De Broglie wusste von Planck, dass es bei Oszillatoren, also allgemein bei schwingungsfähigen Gebilden, verbotene Amplituden gibt. Von der schwingenden Lichtwelle wusste er auch, dass sich diese durch die Sprünge über die verbotenen Amplituden hinweg in Photonen mit der jeweiligen Energie  $W = h f$  „auflöst“. Dadurch waren die Hallwachs-Experimente erklärbar. Nun hatte Einstein auch noch die Relativitätstheorie entwickelt und erkannt, dass Energie  $W$  und Masse  $m$  gemäß  $W = m \cdot c^2$  äquivalent sind. Das Gleichsetzen  $m \cdot c^2 = h f$  bzw.  $m = h f / c^2$  zeigt, dass die Amplitudensprünge der Lichtwelle, also die Photonen, sogar eine Masse besitzen und somit wirklich als Teilchen angesehen werden können. Die Gleichung  $m = h f / c^2$  wurde dann noch mit der für alle Wellen gültigen Gleichung  $c = \lambda \cdot f$  bzw.  $f = c / \lambda$  auf  $\lambda$  umgeschrieben. Dadurch entstand

$m = \frac{h f}{c^2} = \frac{h}{c^2} \cdot f = \frac{h}{c^2} \cdot \frac{c}{\lambda} = \frac{h}{c \cdot \lambda}$ . Diese Gleichung stellt eine Verbindung dar zwischen der Wellenlänge  $\lambda$  der Lichtwelle als Ganzes und der Masse  $m$  der Teilchen in welche sie „zerbrösel“.

De Broglie war nun überzeugt, dass nicht nur die Photonen „Quantensprünge“ einer Welle sind, sondern dass das für alle Teilchen gelten müsste. Tatsächlich wurde De Broglies Gedanke später streng bewiesen. Für alle Teilchen, seien es Elektronen, Quarks oder Neutrinos gibt es jeweils eine Welle, bzw. ein Feld, dessen Quantensprünge diese Teilchen sind. Immerhin konnte De Broglie in seiner Zeit bereits die Wellenlänge seiner „Materiewellen“ richtig angeben: In der Gleichung  $m = h / c \cdot \lambda$  ersetze er die Lichtgeschwindigkeit  $c$  einfach durch die Geschwindigkeit  $v$  des Masse teilchen und stellte um:  $\lambda = h / m \cdot v$ . Diese Gleichung wurde dann experimentell vielfach bestätigt. Sie war Ausgangspunkt der weiteren Entwicklung. De Broglie erhielt dafür den Nobelpreis.

## Aufgaben

- 1) Ein Laser der Leistung  $P = 1\text{ mW}$  emittiert Licht mit  $\lambda = 633\text{ nm}$
- Berechne die Photonenenergie  $W_{ph}$  in  $J$  und in  $eV$ . Wie hängen  $W_{ph}$  und  $P$  zusammen?
  - Bestimme die Anzahl  $n$  der emittierten Photonen pro Sek. Wie hängt  $n$  mit  $\lambda$  und  $f$  zusammen?
  - Für Cäsium gilt  $W_A = 1,94\text{ eV}$ . Berechne die Grenzfrequenz  $f_{Grenz}$  und  $\lambda_{Grenz}$ .
  - Das Laserlicht trifft eine Fotozelle mit Cäsium. Berechne die Photospannung der offenen Schaltung. Wo groß ist  $v_{max}$  der emittierten Elektronen? Wie groß ist  $I_{max}$  in der Kurzschlusschaltung? Warum ist der Fotostrom in der Praxis deutlich kleiner?
- 2) Eine UV-Lampe sendet Licht mit  $\lambda = 254\text{ nm}$  und  $P = 50\text{ mW}$  pro  $m^2$  aus. Das Licht fällt durch eine kreisförmige Blende mit  $d = 1\text{ cm}$  auf eine Fotozelle aus Zink. Die offene Schaltung liefert die Photospannung von  $U_{photo} = 621\text{ mV}$ . Berechne  $W_A$  in  $J$  und in  $eV$  sowie  $f_{Grenz}$ . Welches  $\lambda$  darf das Licht höchstens haben, um Elektronen auszulösen? Wie ändert sich  $U_{photo}$ , wenn der Blendendurchmesser  $d$  verdoppelt wird? Wie groß wäre  $U_{photo}$ , wenn statt des UV-Lichts das Laserlicht mit  $\lambda = 633\text{ nm}$  verwendet würde?
- 3) Eine Fotozelle liefert bei  $\lambda_1 = 600\text{ nm}$  die Photospannung  $U_1 = 710\text{ mV}$  und bei  $\lambda_2 = 500\text{ nm}$  die Photospannung  $U_2 = 1,12\text{ V}$ . Bestimme daraus  $h$  und  $W_A$ . Zeichne einen geeigneten Graphen.
- 4) Bei einer Röntgenröhre hängt die kurzwellige Grenze  $\lambda_{min}$  von der Anodenspannung ab.

Rechne auf Frequenzen um und ermittle mithilfe der Messwerte die Funktionsgleichung  $f_{max}(U)$ . Überlege, wie sich daraus das Planck'sche Wirkungsquantum  $h$  ermitteln lässt. Berechne den Wert.

$U_A$ in $kV$	45	40	35	30
$\lambda_{min}$ in $pm$	62	70	80	93
$f_{max}$ in $10^{18}\text{ Hz}$				

- 5) Berechne die De Broglie-Wellenlänge  $\lambda$  eines Elektrons, das mit  $U_A = 320\text{ V}$  beschleunigt wird. Bei der Bragg-Reflexion wird die Materiewelle des Elektrons auf ein Kristallgitter gestrahlt. Durch Interferenz tritt dann nur unter bestimmte Winkel Verstärkung auf. Diese Winkel nennt man *Glanzwinkel*. Der erste Glanzwinkel erfüllt die Gleichung  $2 \cdot d \cdot \sin \vartheta = \lambda$ . Dabei ist  $\lambda$  die De Broglie-Wellenlänge und  $d$  die Gitterkonstante des verwendeten Kristalls. Berechne den Abstand der Kristallgitterebenen  $d$  eines NaCl-Kristalls, wenn der erste Glanzwinkel für  $U_A = 320\text{ V}$  bei  $\vartheta = 6,5^\circ$  auftritt.

