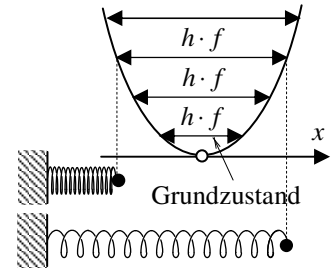


1) Die Heisenbergsche Unbestimmtheits-Relation erklärt den Amplitudensprung beim Oszillator.

Beim Schwarzen Strahler würde die „UV-Katastrophe“ auftreten, wenn die Oszillatoren der Innenwand mit *allen* denkbaren Amplituden schwingen könnten. Max Planck hat festgestellt, dass das *nicht* der Fall ist. Es können nur diejenigen Schwingungsweiten realisiert werden, bei welchen die Gesamtenergie $W_{ges} = W_{kin} + W_{pot}$ ein ganzzahliges Vielfaches der Frequenz $f = (1/2\pi) \cdot \sqrt{D/m}$ der Oszillatoren ist, multipliziert mit dem *Plancksches Wirkungsquantum* $h =$



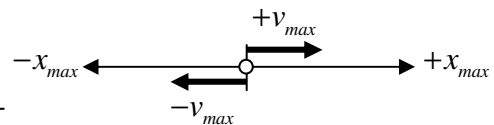
$6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$. Die eigentliche Bewegung, welche zur Abstrahlung bzw. Aufnahme einer EM-Welle führt, ist dann der Sprung über die verbotenen Amplituden hinweg. Dabei ändert sich die Gesamtenergie des Oszillators jeweils um den Wert $\Delta W = h \cdot f$. Dieser spärliche Energieaustausch „füttert“ die hohen Frequenzen dann so wenig, dass die „UV-Katastrophe“ ausbleibt.

Eine Begründung für diese *Quantisierung* der Bewegungsmöglichkeiten gab *Werner Heisenberg*: Weil die Maßeinheit *Joule · Sekunde* des Planckschen Wirkungsquantums h gleich der Maßeinheit des Produktes von *Energie* und *Zeit* ist und weil die Größe h eine *Schlüsselrolle* spielt, meinte Heisenberg, es müsse ein allgemeines Naturgesetz geben, welches besagt, dass der Energieumsatz bei der Änderung eines physikalischen Systems *nicht* unendlich klein sein kann. Während einer Zeitdauer Δt müsse mindestens ein Energiewert $\Delta W = h / \Delta t$ umgesetzt werden. Ein geringerer Energieumsatz ist nicht möglich. Die Formel $\Delta W \cdot \Delta t = h$ heißt *Heisenbergsche Unbestimmtheits-Relation* (HUR). Woher wiederum die HUR stammen könnte, wird in Abschnitt 2) diskutiert.

Jetzt wird gezeigt, dass die HUR tatsächlich als *Ursache* für die Amplitudensprünge beim Oszillator gelten kann. Da Δt aber unbekannt ist und ΔW ermittelt soll werden, ist die Version $\Delta W \cdot \Delta t = h$ der HUR hier ungeeignet. Deshalb verwenden wir die Umformung (siehe a)) $\Delta W \cdot \Delta t = \Delta x \cdot \Delta p$.

Für Δx und Δp liefert der Oszillator nämlich Ausdrücke:

$\Delta x = 2 \cdot x_{max}$ ist die doppelte Amplitude, denn der Oszillator schwingt zwischen $\pm x_{max}$ hin und her. Das Impulsintervall Δp ergibt sich aus der doppelten Maximalgeschwindigkeit beim Nulldurchgang v_{max} . Wegen



$p = m \cdot v$ gilt $\Delta p = 2 \cdot m \cdot v_{max}$. Somit gilt $\Delta W \cdot \Delta t = \Delta x \cdot \Delta p = (2 \cdot x_{max}) \cdot (2 \cdot m \cdot v_{max}) = 4 \cdot m \cdot x_{max} \cdot v_{max}$.

Von diesem Ausdruck wird in b) gezeigt, dass er den Wert $\approx h$ besitzt.

a) Zur Umformung von $\Delta W \cdot \Delta t$ auf $\Delta x \cdot \Delta p$ setzen wir $W = W_{kin} = 1/2 m v^2$, denn beim Nulldurchgang „erwischen“ wir W_{ges} als W_{kin} . Nun übertragen wir die Δ -Schreibweise in die Differential-Schreibweise, nutzen die Formeln der Differentialrechnung und setzen anschließend wieder zurück: Setze also $\Delta W = dW$ und $\Delta t = dt$ und beachte die Differentialquotientenschreibweise der Ableitung $f' = df / dx$. Daraus folgt $df = f' \cdot dx$. Für die Ableitung von W nach v gilt

$$W' = \frac{dW}{dv} = \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)' = \frac{1}{2} \cdot (2 m v) = m v. \text{ Daraus ergibt sich } dW = m \cdot v \cdot dv \text{ bzw. } dW \cdot dt =$$

$$m \cdot v \cdot dv \cdot dt = (v \cdot dt) \cdot (m \cdot dv). \text{ Nun beachten wir, dass die Geschwindigkeit } v \text{ die erste Ableitung}$$

des Ortes x nach der Zeit t ist, also $v = x' = dx / dt$. Demnach kann man $(v \cdot dt)$ durch dx ersetzen. Weil die Ableitung von $p = m \cdot v$ wegen konstanter Masse $p' = dp / dv = m$ ergibt, können wir entsprechend $(m \cdot dv)$ durch dp ersetzen. Damit wird $dW \cdot dt = (v \cdot dt) \cdot (m \cdot dv) = dx \cdot dp$.

Rückschreiben in Δ -Schreibweise ergibt das erwünschte Resultat $\Delta W \cdot \Delta t = \Delta x \cdot \Delta p$. Qed.

b) Nachweis, dass $\Delta x \cdot \Delta p$ für die kleinste erlaubte Amplitude (ungefähr) den Wert $1 \cdot h$ ergibt:

Am Umkehrpunkt gilt $W_{ges} = 1/2 \cdot D \cdot x_{max}^2$, also $x_{max} = \sqrt{2 \cdot W_{ges} / D}$.

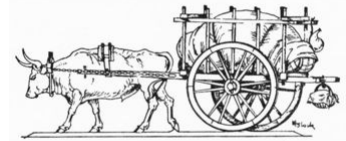
Am Nulldurchgang gilt $W_{ges} = 1/2 \cdot m \cdot v_{max}^2$, also $v_{max} = \sqrt{2 \cdot W_{ges} / m}$.

Daraus folgt $\Delta x \cdot \Delta p = 4 \cdot m \cdot \sqrt{2 \cdot W_{ges} / D} \cdot \sqrt{2 \cdot W_{ges} / m} = 4 \cdot 2 \cdot W_{ges} \cdot \sqrt{m / D}$. Für die Oszillatorfrequenz gilt $f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$, also $\sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{1}{2\pi f}$. Einsetzen ergibt $\Delta x \cdot \Delta p = \frac{8 \cdot W_{ges}}{2\pi f}$. Die kleinste erlaubte Amplitude schwingt mit $W_{ges} = 1 \cdot h \cdot f$. Daher gilt $\Delta x \cdot \Delta p = (4/\pi) \cdot h \approx \underline{\underline{1,3 \cdot h}}$. Qed.
Das Ergebnis wurde später durch die *Energie des Grundzustandes* nachgebessert.

2) Der historische Hintergrund erklärt die Heisenbergsche Unbestimmtheits-Relation

Wir leben in Häusern und hoffen, dass der Zahn der Zeit nicht nagt, dass sie an ihrem Orte bleiben. Wasser gurgelt den Bach hinunter, es kennt keine Ruhe. Noch unruhiger sind die Gedanken, keiner kann sie stoppen. Ist die Welt ein „Sein“, ein festes Wohnen oder ist sie ein „Werden“, stets ein Wandel? Im alten Griechenland vertrat Heraklit das „Werden“ und sagte „Panta rhei“, „alles fließt“. Doch die Mehrheit der Philosophen sah das „Sein“ im Vordergrund. Die antike Naturlehre unterstützte das „Sein“, welches durch den „Ort“ repräsentiert wird. Das „Werden“, also die „Geschwindigkeit“ war sekundär. Es galt das „Ochsenkarrenprinzip“:

Erlahmt der Ochse, so bleibt der Wagen stehen. Ohne Kraft verbleibt der Körper an *einem* Ort. Die antike Naturlehre umfasste daher alle möglichen *Orte*. Die Geschwindigkeit war damals keine selbstständige Größe, sie tendierte immer zu null. Noch Johannes Kepler (1571-1630) meinte, dass kleine Engelchen die Planeten schieben müssten, damit sie nicht liegen bleiben. Das Werden, also die Geschwindigkeit, gewann erst mit *Galilei* seine Bedeutung zurück: Das Liegenbleiben beruht auf der Reibung und ohne Reibung behält ein Körper seine Geschwindigkeit auf immer bei. Damit waren „Ort“ und „Geschwindigkeit“ völlig gleichberechtigt und der „Physikalische Raum“, z.B. für ein Teilchen, war nicht mehr *drei*-, sondern *sechsdimensional*: Drei Zahlen $(x | y | z)$ für den Ort und drei unabhängige Zahlen $(v_x | v_y | v_z)$ für die Geschwindigkeit.



Dann kam Newton, das Menschheitsgenie. Er fand eine Brücke zwischen den disparaten Welten von „Sein“ und „Werden“, welche die Alten nicht zusammen bringen konnten. Das Problem: Der Ort besteht zu *einem* Zeitpunkt. Doch die Geschwindigkeit besteht immer zwischen *zwei* Zeitpunkten, denn der Ortswechsel „verbraucht“ Zeit. Durch die Idee vom Grenzwert $\Delta t \rightarrow 0$ „erzauerte“ sich Newton eine Geschwindigkeit, die Momentangeschwindigkeit, welche genauso wie der Ort ebenfalls nur zu *einem* Zeitpunkt besteht. Durch Newtons Trick $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (x_2 - x_1) / (t_2 - t_1)$ wurde die klassische Mechanik, ja, ohne Übertreibung, die gesamte Neuzeit erschaffen.

Alle Bewegungen konnten nun, wie durch göttliche Prädestination, vorausberechnet werden, nicht nur der Lauf der Planeten am Himmel, ebenso die Bewegungen von Maschinen aller Art, die Bewegung der Luftmassen bei der Wetterbildung und alles andere auch. Der Erfolg von Newtons Zaubertrick war so gigantisch, dass der Preis dafür fast völlig aus dem Focus geriet.

Man gewöhnte sich einfach an den leichtfertigen Umgang mit dem Unendlichen, welches in jeder Ableitung (Differentiation) bei der Grenzwertbildung $\Delta t \rightarrow 0$ mittels $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$ steckt.

Fast jede physikalische Rechnung enthält dieses bedenkliche Gedankenkonstrukt des Unendlichen. Wir können das Unendliche zwar denken, doch in der *Anatomie* unseres Sinnes- und Denkapparates kommt das Unendliche nicht vor. Die Evolution hatte offenbar keinen Anlass uns damit auszustatten. Im Gegenteil: Der Sinnesapparat ist für „portionierte“ Wahrnehmung ausgelegt:

- Die kleinste Schwingungsamplitude, die unser Ohr an seinem Empfindlichkeitsmaximum bei etwa 1000 Hz noch wahrnehmen kann, beträgt etwa 1 A. Bei noch größerer Empfindlichkeit wäre die Brown'sche Molekularbewegung hörbar und das ist sinnlos. (Prof. Wurz, Uni Bern S.175) https://www.phinst.unibe.ch/unibe/portal/fak_naturwis/b_paw/e_iphy/content/e54738/e402216/e476584/e476589/pane476593/e476613/HFPhysikPraktiSkriptHS20_ger.pdf
- Das menschliche Auge ist empfindlicher als gedacht. Unter optimalen Umständen kann es sogar einzelne Photonen registrieren. Eine höhere Empfindlichkeit wäre sinnlos. <https://www.scinexx.de/news/biowissen/unser-auge-sieht-sogar-einzelne-photonen/>

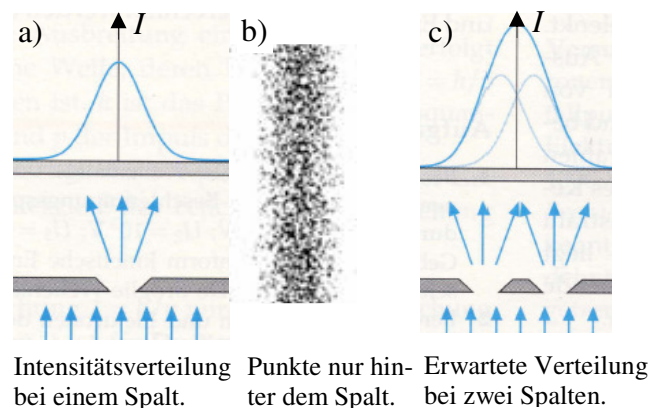
- c) Um blitzschnell auf unbekannte komplexe Situationen vorurteilsfrei reagieren zu können, hat das Gehirn im Laufe der Evolution ein Mustererkennungssystem entwickelt, welches bei i einlaufenden Informationen alle 2^i denkbaren Kombinationen dieser Informationen bilden kann. Die Verarbeitungsweise folgt nicht dem Analoggesetz mit beliebig kleinen Werten $x \rightarrow 0$, sondern eher der Logik eines Quantencomputers. <https://doi.org/10.3389/fnsys.2020.00058>

Wenn wir nun davon ausgehen, dass die Lebewesen im Laufe der Evolution ein immer besseres Spiegelbild der tatsächlichen Außenwelt wurden, dann liegt es nahe, dass Newton mit seinem Grenzwert $n \rightarrow \infty$ über das Ziel hinaus geschossen ist und dass die Brücke zwischen „Sein“ und „Werden“ doch realitätsbezogener ist. Und dieser Realismus scheint sich in der Heisenbergschen Unbestimmtheits-Relation $\Delta x \cdot \Delta p = h$ zu offenbaren. Nun sind wir seit mehr als 300 Jahren an das kausale Denken von Newton gewöhnt, so dass uns alles andere als unlogisch und völlig unfassbar erscheint. Doch weil die Quantentheorie nicht nur völlig logisch, sondern sogar richtiger, einfacher und natürlicher ist als das Newtonsche Denken, wird sie sicher, wie damals das neue Weltbild nach der Kopernikanischen Wende, irgendwann zur selbstverständlichen Denkgewohnheit werden.

3) Jetzt lernen wir das Doppelspaltexperiment und „Schrödingers Katze“ kennen.

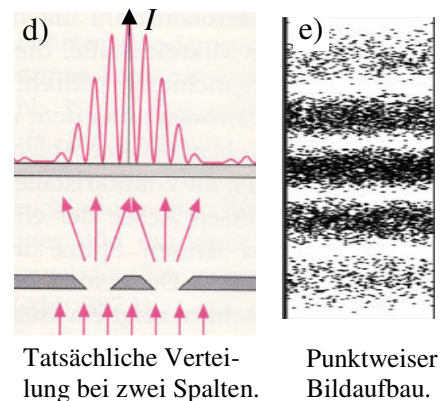
Das *Doppelspaltexperiment* ist das wohl berühmteste Experiment der Quantentheorie. Es sorgte für größte Aufregung. Das Experiment wurde zunächst mit Licht durchgeführt, dann 1961 von Jönsson mit Elektronen und schließlich 1999 in der Gruppe Zeilinger, Wien, mit Fullerenen, riesigen Molekülen der Massenzahl 3000. Mit zwei Ohren ist das schon fast eine Katze. Jedes Mal baut sich ein *Interferenzbild* auf der Fotoplatte bzw. auf dem Detektorschirm auf.

Die *Versuchsvoraussetzung* sind „*Monochromie*“ und „*Kohärenz*“. Die Welle muss also *einfarbig* sein und *gleichphasig* durch die Löcher treten. Das erreicht man durch *Strahlaufteilung*.



Ergebnisse bei der Bestrahlung der Spalten.:

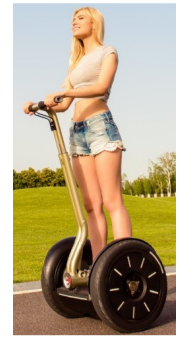
- (1) Bei hinreichend *geringer* Bestrahlungsintensität baut sich das Bild auf der Fotoplatte bei *jedem* der Versuchsaufbauten in einer *zeitlichen Abfolge* punktweise auf. Bei Elektronen und Fullerenen ist das punktweise Auftreffen verständlich, denn sie gelten als Teilchen. Doch auch bei *Lichteinstrahlung* baut sich das Bild punktweise auf. Das bestätigt die Photonennatur des Lichtes. Nur bei *großer* Bestrahlungsintensität erfolgt der schrittweise Bildaufbau so schnell, dass eine *gleichzeitige* Einschwarzung großer Gebieten der Fotoplatte vorgetäuscht wird.



- (2) Beim einfachen Spalt (Abb. a) und b)) ergibt sich auf der Fotoplatte ein *einzig*er Einschlagsstreifen *direkt hinter* dem Spalt. Doch bei Spaltverkleinerung wird das Einschlagsgebiet nicht etwa schmaler, sondern breiter. Übersieht man diese Tatsache, so scheinen die einzelnen Teilchen auf *Flugbahnen* durch den Spalt auf die Platte zu fliegen.
- (3) Denkt man an die Flugbahnen, so sollte beim Doppelspalt (Abb. c)) direkt hinter jedem der beiden Spalte ein Einschlagsstreifen entstehen. So ist es aber *nur*, wenn nacheinander jeweils einer der Spalte *abgedeckt* wird und man anschließend das *Summenbild* betrachtet.
- (4) Sind jedoch beide Spalte *gleichzeitig* offen (Abb. d) und e)), so hat man zwar wiederum einzelne Einschläge, doch diese befinden sich *genau* in den von Huygens vorhergesagten Bereichen der konstruktiven Interferenz $x_n \approx n \cdot \lambda \cdot a / g$. Dazwischen findet selbst bei langer Bestrahlungsdauer so gut wie *kein* Einschlag statt. Schritt für Schritt baut sich also am Doppelspalt das Huygenssche *Interferenzbild* auf. (Siehe Arbeitsblatt Quanten 1)

Erklärung der Ergebnisse des Doppelspaltexperimentes

Das Interferenzbild kommt nach Huygens dadurch zustande, dass das Licht eine *räumlich ausgedehnte* Welle ist. *Zwei* Auslenkungsbereiche *ein und derselben* Welle durchdringen *gleichzeitig* und *synchron* die beiden Spalte und überlagern sich dann. So kommt es zu Verstärkung und Auslöschung. Auch die *Brechung* an der Glasoberfläche kann nach Huygens *nicht* durch *einen* einzigen „unendlich dünnen“ Lichtstrahl gelingen. Wie der Segway für die Richtungsänderung *zwei* Rädern benötigt, so müssten auch für die Brechung mindestens *zwei* Lichtstrahlen „kooperieren“. Die Photonen aber sind *einzel*n, wie kann ihnen Interferenz und Brechung gelingen?



Man kann die Strahlungsintensität sogar derart gering wählen, dass pro Stunde nur *ein einziges* Photon auf der Fotoplatte einschlägt und trotzdem baut sich über Monate hinweg das Interferenzbild auf.

Es scheint, als würde sich jedes Photon aufspalten, seine Teile durch die Spalte schicken, sich anschließend wieder vereinigen und dann dabei mit sich selbst interferieren. Doch ein Photon allein erzeugt gar kein Interferenzbild, es erzeugt nur *einen* Einschlagpunkt. Demnach müssten sich die noch garnicht existenten Photonen bereits in der Lampe „absprechen“, wo sie künftig einschlagen sollen. Das ist natürlich Quatsch.



a) Woher kommt der „Zufall“ in der Quantentheorie? In Arbeitsblatt Quanten 4 sahen wir, dass Photonen keine Individualität haben. Sie sind Amplitudensprünge einer EM-Welle und ihre Energie enthält deren Frequenz. Ohne Welle springt nichts. Ist die Wellenenergie *weniger* als $h \cdot f$ über ihrem Grundzustand, dann gibt es kein Photon. Trotzdem existiert die Welle, sie befindet sich lediglich in ihrem „Vakuumzustand“. Steigt die Energie über den Schwellwert $h \cdot f$, so erfolgt ein Amplitudensprung, *ein* Photon ist da. Doch dieses Photon ist gar kein „dieses“. Es ist *ununterscheidbar* von all den anderen *möglichen* Photonen und darf deshalb *keinerlei* Regel folgen, welche es identifizierbar machen würde. Es *muss* zufällig und unerwartbar sein. Denken wir an den Würfel: Das *Gesetz der Großen Zahl* steckt in ihm, auch wenn noch nicht geworfen wurde. Wird geworfen, so gibt es *ein* Ergebnis, doch alle übrigen Ergebnisse waren ebenso *möglich*. Gäbe es eine Regel für das Ergebnis, so wäre der Würfel ungeeignet. Die Gleichverteilung der Ergebnisse folgt dann erst *statistisch*.

b) Jetzt verstehen wir, wie der „Zufall“ das Interferenzbild erzeugt:

Die elektromagnetische Welle erfüllt den verfügbaren Raum, selbst im Vakuumzustand, wenn kein Photon vorhanden ist. Bei zwei offenen Spalten gehören die Spalte mit zu diesem Raum. Also: Nicht die Photonen, sondern die Feldstärken *überlagern* sich so, wie Huygens es vorgibt. Steigt die Energie über den Schwellwert, so erscheint das Photon *deshalb* an beliebiger Stelle, weil es *gleichberechtigt* an *jeder anderen* Stelle *ebenso* erscheinen könnte. Die Wahrscheinlichkeit für die Stelle berechnet sich aus dem Wert der Feldstärke dort. *Beim Einschlag* absorbiert die Fotoplatte das Photon, wodurch die Energie der EM-Welle auf den Grundwert sinkt und das Feld in den „Vakuumzustand“ zurück *kollabiert*. Nun geht alles mit dem nächsten Photon ganz unabhängig von vorne los.

Bisher haben wir vom Licht gesprochen. Doch bei Elektronen und Fullerenen geschieht das Gleiche: Alle Materieteilchen genügen der Quantentheorie. Immer baut sich schrittweise das Interferenzbild auf. Das Photon entsteht als Amplitudensprung der EM-Welle. Auch für das Elektron und alle übrigen materiellen Teilchen existiert eine entsprechende Welle, bzw. ein entsprechendes Feld.

Louis de Broglie war der Erste, der einem Materieteilchen mit Masse m und Geschwindigkeit v die Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$ zugeordnet hat. Einsetzen in die Gl. der Interferenzmaxima $x_n \approx n \cdot \lambda \cdot a / g$ ermöglicht die experimentelle Überprüfung. Und: Es stimmt.



4) Und woher kommen die Felder?

Sie entsprechen den wichtigsten Symmetrien, die es in dieser Welt gibt.

Z.B. hat das Quadrat vier Drehungen und vier Spiegelungen als Symmetrieelemente.

Doch das Quadrat ist zu einfach, es bringt weder ein Feld noch ein Quantenteilchen hervor.

Aber so ähnlich funktioniert es. (Siehe z.B. auch Wikipedia: Feldquant)