

Aufgabe: Positron-Emissions-Tomographie PET

Die Positron-Emissions-Tomographie ist ein medizinisches Diagnoseverfahren.

Hierbei wird z. B. das Isotop ${}^{18}_9F$ (Atommasse 18,000937u) in eine Trägersubstanz eingebaut, die dem Patienten verabreicht wird und sich verstärkt in Tumorzellen anreichert. ${}^{18}F$ zerfällt mit einer Halbwertszeit von 110min, die Zerfallsgleichung lautet ${}^{18}_9F \rightarrow {}^{18}_8O + {}^0_1e^+ + {}^0_0\nu$.

- a) Begründe mit Hilfe der Isotopentabelle, welche Kernumwandlung liegt vor.
Begründe, dass beim Zerfall zunächst ein negativ geladenes Sauerstoffion entsteht.
- b) Berechne die bei diesem Zerfallsprozess frei werdende Energie ΔW .

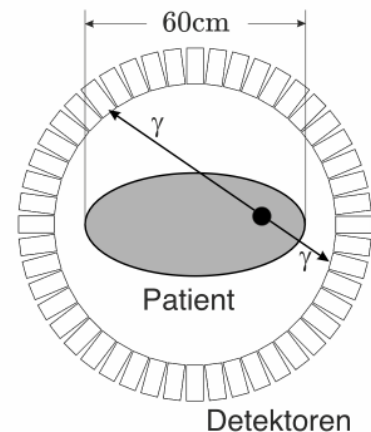
Erkläre, warum die kinetische Energie der meisten Positronen deutlich geringer als dieser berechnete Energiewert ist.
(Zur Kontrolle:
 $\Delta W = 0,632 \text{ MeV}$)

Material	Symbol	Atommasse in u	Kernmasse in u
	${}^{18}_9F$	18,000 937 20	17,995 999 98
	${}^{18}_8O$	17,999 161 56	17,994 772 92
	${}^0_{-1}e^- ; {}^0_1e^+$	$m_e = 5,4858 \cdot 10^{-4} \cdot u$	$e = 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
		$u = 1,660540 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$;	$c = 2,997926 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Das beim Zerfall emittierte Positron wird im Gewebe rasch abgebremst und zerstrahlt mit einem Elektron des Gewebes zu zwei γ -Quanten identischer Energie.

- c) Gehe davon aus, dass die Teilchen vor der Zerstrahlung ruhen.
Begründe, dass die zwei γ -Quanten in entgegengesetzter Richtungen ausgesandt werden und dass ihre Energie zusammen 1,02 MeV beträgt.

Um den Patienten sind Detektoren ringförmig angebracht (siehe Abbildung). Nach jeder Zerstrahlung registrieren zwei Detektoren je ein γ -Quant. Damit die Signale zweier Detektoren derselben Zerstrahlung zugeordnet werden können, müssen diese innerhalb einer vorgegebenen Zeitspanne Δt registriert werden.



- d) Erläutere, wie mit dieser Apparatur der Ort von Tumorzellen bestimmt werden könnte.
- e) Schätze mithilfe der Abbildung ab, wie groß Δt mindestens sein muss, um Tumorzellen des ange deuteten Patienten in allen Körperregionen lokalisieren zu können.
Nimm vereinfachend an, dass sich die γ -Quanten im Körper mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.
Ein Patient bekommt eine Lösung mit einer Aktivität von 400 MBq verabreicht.
- f) Ermittle die Masse an ${}^{18}F$, die zu Beginn in der Lösung enthalten war.
- g) Für eine grobe Abschätzung der Strahlenbelastung des Patienten ($m = 80 \text{ kg}$) soll angenommen werden, dass sich das ${}^{18}F$ -Präparat 110min im Körper befindet, bevor es vollständig ausgeschieden wird, und dass die mittlere Aktivität während dieser Zeit 300 MBq beträgt.
Gehe weiter davon aus, dass die Hälfte der Zerfallsenergie und die Hälfte der Energie der γ -Quanten vom Körper absorbiert werden.
Bestimme die Äquivalentdosis H im Körper. Vergleiche dein Ergebnis mit dem Wert von 4,0 mSv für die durchschnittliche jährliche Strahlenbelastung.

- h) Wie wird das Radionuklid ${}^{18}F$ hergestellt?

Lösung

Bemerkung: Das Verfahren liefert scharfe Bilder, weil die Weglänge des Positrons von seiner Entstehung beim Zerfall bis zur Annihilation mit einem Elektron meist kleiner als ein Millimeter ist.

- a) ${}^{18}_9F$ ist zwar radioaktiv. Es steht in der Isotopentabelle oberhalb der „Diagonale“ der stabilen Kerne. Da das Bestreben immer zu den stabilen Kernen erfolgt, erfolgt ein β^+ -Zerfall. Radioaktivität bedeutet, dass der Kern instabil ist. Solange der Zerfall aber nicht stattgefunden hat, benimmt sich der Kern nicht anders als ein stabiler Kern. Er zieht eine, seiner Kernladungszahl entsprechende Anzahl von Elektronen zu sich, um elektrisch neutral zu sein. Das ${}^{18}_9F$ besitzt also wegen seiner 9 Protonen im Kern entsprechend 9 Elektronen in der Hülle. β^+ -Zerfall: ${}_1^1p \rightarrow {}_0^1n + {}_1^0e + \nu$ Ein Proton wird zu einem Neutron, Positron und Neutrino. Bei dem Zerfall bleibt das Neutron im Kern und wandelt ihn um in ${}^{18}_8O$. Das Positron fliegt weg. Da die Elektronenhülle nicht so schnell mitkommt, behält sie zunächst die vormaligen 9 Elektronen, die sie vor dem Zerfall hatte. Ein Sauerstoffatom mit 9 Elektronen ist aber negativ ionisiert und damit ${}^{18}_8O^-$.

- b) (1) Berechnung des Massendefekt Δm über die Atommassen: ${}^{18}_9F \rightarrow {}^{18}_8O^- + {}_1^0e^+ + {}_0^0\nu$.

Dann muss ${}^{18}_8O^-$ umgeschrieben werden: ${}^{18}_8O^- = {}^{18}_8O + {}_{-1}^0e^-$

Die Gleichung schreibt man um in ${}^{18}_9F \rightarrow ({}^{18}_8O + {}_{-1}^0e^-) + {}_1^0e^+ + {}_0^0\nu$.

Daraus folgt $\Delta m = m_{Atom}({}^{18}F) - m_{Atom}({}^{18}O) - \underline{2} \cdot m_e = 0,678\,48 \cdot 10^{-3} u$.

Das Neutrino ist masselos.

- (2) Berechnung des Massendefekt Δm über die Kernmassen:

$\Delta m = m_{Kern}({}^{18}F) - m_{Kern}({}^{18}O) - \underline{1} \cdot m_e = 0,678\,48 \cdot 10^{-3} u$

Das Neutrino ist masselos.

Ein u entspricht der Energie $W_u = 9,3149 \cdot 10^8 eV$

$\Delta W = 0,678\,48 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{631,997 keV}}$

$\Delta W = 0,6319997 MeV$ stellt die Obergrenze der kinetischen Energie eines Positrons dar.

Neutron und Neutrino nehmen auch einen geringen Energieanteil auf. Das wird hier ignoriert.

- c) Positron und Elektron sollen vor der Zerstrahlung als ruhend angesehen werden. Ihr Gesamtimpuls ist dann gleich null. Beiden zusammen zerstrahlen zu Licht. Energetisch könnten sie zu einem einzigen Photon werden. Da der Impuls eines Photons jedoch $p = m \cdot v = m_{ph} \cdot c$ immer ungleich null ist, (Photonen können nicht ruhen), ist der Impulserhaltungssatz mit *einem* Photon nicht erfüllbar. Also müssen Positron und Elektron in mindestens *zwei* Photonen zerstrahlen. Die Wahrscheinlichkeit dass mehr als zwei Photonen entstehen nimmt mit den Potenzen der Lichtgeschwindigkeit ab. Sie sind also vernachlässigbar. Also müssen die beiden Photonen mit gleichen Impulsbeträgen in entgegengesetzte Richtungen fliegen. Wegen $p_1 = m_{ph,1} \cdot c$ und $p_2 = m_{ph,2} \cdot c$ müssen die Photonen dann auch gleiche Masse bzw. Energie bzw. Frequenz haben. Das Elektron in einem Atom des Gewebes ist quasi ruhend. Für das herausgeschossene Positron gilt das weniger. Doch auch hier ist die kinetische Energie klein gegenüber der Energie, welche der Masse des Positrons entspricht. Daher haben beide Photonen zusammen die Energie $W_\gamma = 2m_e \cdot 9,3149 \cdot 10^8 eV = 1,022 MeV$

d) Der Ort des Zerfalls liegt irgendwo auf der Verbindungsgeraden der beiden ansprechenden Detektoren. In jedem Strahlungspunkt müssen also ausreichend viele Zerfälle erfolgen, um die zusammengehörigen Geraden einem Schnittpunkt zuzuordnen.

e) Der Zerfall in einer Körperzelle der Körpermitte ist den Gangunterschied gleich null, so dass die Körpermitte scharf abgebildet wird. Für den Randbereich ist der maximale Gangunterschied $\Delta s = 0,6m$. Das entspricht einer Zeitdifferenz von $\Delta t = \Delta s / c = 2ns$.

Ohne Korrektur wird der Randbereich dadurch unscharf. Deshalb berücksichtigen moderne Auswertungsmethoden in einem zweiten Schritt auch die Zeitdifferenzen und synchronisieren danach.

Bei dieser Synchronisation wird dann der Mittelbereich unscharf.

Die Auswertung errechnet also mehrere Bilder, die dann zusammengefügt werden.

Gerade in letzter Zeit wurden hier große Fortschritte erzielt.

f) Für die Strahlungsaktivität = Strahlungseinh. (α, β oder γ) pro Sek. gilt $A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{t \cdot \ln 2}{t_H}}$.

Jede Strahlungseinheit beruht auf einem Zerfall. Also mindert jede Strahlungseinheit die Anzahl

$N(t)$ der verbleibenden radioaktiven Kerne um eins. Es gilt $N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{t \cdot \ln 2}{t_H}}$.

Wegen $A(t) = -\dot{N}(t)$ folgt dann $A_0 = \frac{\ln 2}{t_H} \cdot N_0$ bzw. $N_0 = \frac{t_H}{\ln 2} \cdot A_0$.

Es gilt $t_H = 110 \cdot 60s = 6600s$ und damit $N_0 = t_H \cdot A_0 / \ln 2 = 6600s \cdot 400 \cdot 10^6 Bq / \ln 2 = 3,809 \cdot 10^{12}$

Für die Masse folgt dann $m = N_0 \cdot 18,00093720 \cdot u = 68,5604 \cdot 10^{12} \cdot u$.

Mit $u = 1,660540 \cdot 10^{-27} kg$ folgt dann, dass anfangs die Masse $m = 0,1138 \cdot 10^{-12} kg$ an radioaktivem Jod in der Lösung war.

g) Äquivalenzdosis: Siehe Dorn Bader S. 321

Um die unterschiedliche biologische Wirkung ionisierender Strahlen in demselben Gewebe oder Organ quantitativ miteinander zu vergleichen, wurde die Äquivalenzdosis H eingeführt.

Man erhält sie durch Multiplikation der Energiedosis ($D =$ absorbierte Energie pro Körpermasse) mit einem dimensionslosen Strahlungsgewichtungsfaktor w . Für α, β, γ -Strahlung gilt $w = 1$.

Die Maßeinheiten von Energiedosis D und Äquivalenzdosis H sind beide J/kg .

Das wird mit Sievert = Sv abgekürzt: $Sv = J/kg$.

Die Obergrenze der kinetischen Energie der Positronen beträgt $\Delta W = 0,6319997 MeV$.

Die gemeinsame Energie der beiden Photonen nach Zerstrahlung beträgt $W_\gamma = 1,022 MeV$

Insgesamt wird also pro Zerfall die Strahlungsenergie $\Delta W + W_\gamma = 1,653999 MeV$ abgegeben.

Die Hälfte davon wird im Mittel vom Körper absorbiert.

Pro Zerfall wird also $W_{abs} = 0,826997 MeV$ von Körper als Strahlenbelastung absorbiert

Da Sievert in *Joule* gemessen wird, muss umgerechnet werden, also mit der Maßzahl von e in Coulomb multiplizieren: $W_{abs} = 0,1325 \cdot 10^{-12} J$.

Die mittlere Aktivität soll $A = 300 MBq$ betragen.

Also wird pro Sekunde die Energie $0,1325 \cdot 10^{-12} J \cdot 300 \cdot 10^6 1/s = 3,975 \cdot 10^{-5} J/s$ absorbiert.

Während der Expositionsdauer von $\Delta t = 6600s$ wird $W = 6600s \cdot 3,975 \cdot 10^{-5} J/s = 0,2623 J$

absorbiert. Mit $m = 80kg$ ergibt sich wegen des Gewichtungsfaktors $w = 1$ die Äquivalenzdosis $H = W/m = 3,279 mSv$.

Das ist in der Größenordnung der jährlichen Strahlenbelastung von $4,0 mSv$

h) Zur Herstellung des radioaktiven $^{18}_9F$ muss die Klinik ein Zyklotron betreiben.

Dort wird $^{18}_8O$ mit Protonen beschossen $^{18}_8O + p \rightarrow ^{19}_9F \rightarrow ^{18}_9F + n$.

Neuerdings kommen Radionuklidgeneratoren zum Einsatz, in welchem ein Mutternuklid mit großer Halbwertszeit kontinuierlich in das gewünschte Nuklid zerfällt. Weil dieses chemisch ein anderer Stoff ist kann es chemisch abgetrennt ("abgemolken") werden.

Material 1: Isotopentabelle

		Anzahl der Protonen Z									
Z/N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
9	β^+									$^{17}_9F$	$^{18}_9F$
8						$^{13}_8O$	$^{14}_8O$	$^{15}_8O$	$^{16}_8O$	$^{17}_8O$	
7						$^{12}_7N$	$^{13}_7N$	$^{14}_7N$	$^{15}_7N$	$^{16}_7N$	
6				9_6C	$^{10}_6C$	$^{11}_6C$	$^{12}_6C$	$^{13}_6C$	$^{14}_6C$	$^{15}_6C$	
5				8_5B		$^{10}_5B$	$^{11}_5B$	$^{12}_5B$	$^{13}_5B$	$^{14}_5B$	
4				7_4Be		9_4Be	$^{10}_4Be$	$^{11}_4Be$	$^{12}_4Be$		
3				6_3Li	7_3Li	8_3Li	9_3Li		$^{11}_3Li$		
2		3_2He	4_2He		6_2He		8_2He				
1	1_1H	2_1H	3_1H								
0		1_0n								β^-	

Anzahl der Neutronen N