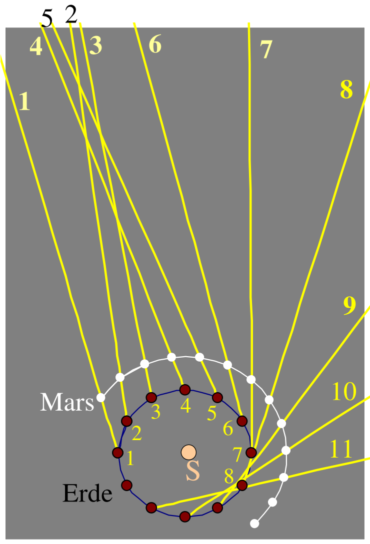


F) Die drei Keplerschen Gesetze.

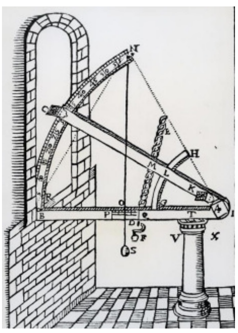
1) Historischer Vorlauf.

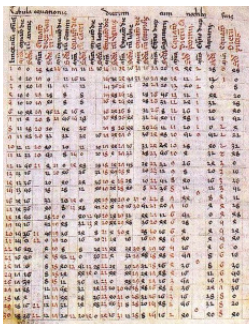
In der griechischen Antike hatte nicht nur Eratosthenes (276-194 v. Chr.) die Erde als Kugel erkannt und ihren Umfang recht präzise ermittelt, auch Aristarchos von Samos (310-230 v. Chr.) schlussfolgerte aus der Beobachtung der Planetenbewegung, dass nicht die Erde im Mittelpunkt stehe, sondern dass die Sonne das Zentrum sei. Andere Denker, insbesondere Aristoteles (384-322 v. Chr), befürworteten hingegen das *geozentrische* Weltbild. Doch in diesem Weltbild um*kreisen nur* Sonne und Mond die Erde. Die Bahnen *aller* Planeten durchlaufen, von der Erde aus betrachtet, keine Kreise, sondern teils sogar rückwärts gerichtete Schleifen. Weil die Schleifen für Merkur und Venus, von der Sonne überblendet, unentdeckt blieben, galten diese Planeten der Astrologie als „harmlos". Die sichtbaren Schleifen bei Mars, Jupiter und Saturn machten diese Gestirne hingegen „mächtig". Ptolemäus (100-160 n Chr) erklärte die Schleifen dann durch eine geniale, aber völlig willkürliche Epizyklentheorie. Das reichte den nachfolgenden Epochen, denn diesen ging es um dogmatische *Glauben*ssätze und nicht um das gewaltfreie diskursive *Freidenkertum* der alten Griechen. Es war Nikolaus Kopernikus (1473-1543), der mit seiner *Kopernikanischen Wende* zum



heliozentrischen Weltbild zurückkehrte und die Planeten auf *Kreisbahnen* um die *Sonne* laufen ließ. Diese Kreisbahnen erschienen den kirchlichen Eliten wegen ihrer Harmonie zwar sogar die Ehre des Schöpfergottes zu steigern, doch die *exzentrische* Position der Erde *außerhalb* der Mitte erschien *politisch* gefährlich. „Einfache" Menschen könnten zu Revolution und Umsturz angestiftet werden. Das Weltbild wurde daher von katholischen und später auch der protestantischen Kräften per Strafandrohung verboten. Dennoch ging die Forschung an den Höfen und selbst im Vatikan weiter, denn mit präziseren *astrologischen* Vorhersagen wäre man im Vorteil. So wurde der geniale dänische Ingenieur Tycho Brahe Hofastronom von Kaiser Rudolfs II. Mit seinen hoch-


Tycho Brahe 1546-1601


Mauerquadrant


Tabellen v. Tycho Brahe


Johannes Kepler 1571-1630

präzisen Mauerquadranten (Peilung ohne Linsen) beobachtete und tabellierte er den Planetenlauf auf 2 Bogenminuten aus Erdsicht genau. Nach Brahes Tod wurde Johannes Kepler Hofmathematicus am Kaiserhof und übernahm Brahes Tabellen. Er rechnete die Schleifenbahnen auf Kopernikanische Kreise um und erkannte, dass die Positionsdaten des Mars abschnittsweise um 8 Bogenminuten von der Kreisbahn abwichen. Das war *quantitativ* wenig, aber *qualitativ* viel, denn das Kreisideal, welches seit der Antike gültig war, stimmte nicht mehr: Die Planetenbahn erwies sich als elliptisch. Das Schlimme daran: Die Sonne befand sich *nicht* in der Ellipsenmitte, sie stand leicht versetzt davon in einem der Brennpunkte. Damit war die Mitte leer. Die „*leere Mitte*" hatten katastrophale Folgen für das dogmatische Denken, denn die Mitte entsprach Gott. Man vermag sich kaum vorzustellen, welche eines Mutes es bedurfte in der Zeit der Scheiterhaufen eine „leere Mitte" zu postulieren.

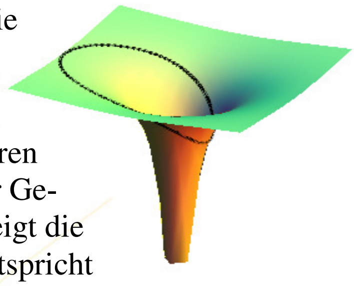
2) Kepler fasste seine Erkenntnis in drei Gesetzen zusammen:

Erstes Keplersches Gesetz:
Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen. Die Sonne steht in einem der Brennpunkte.

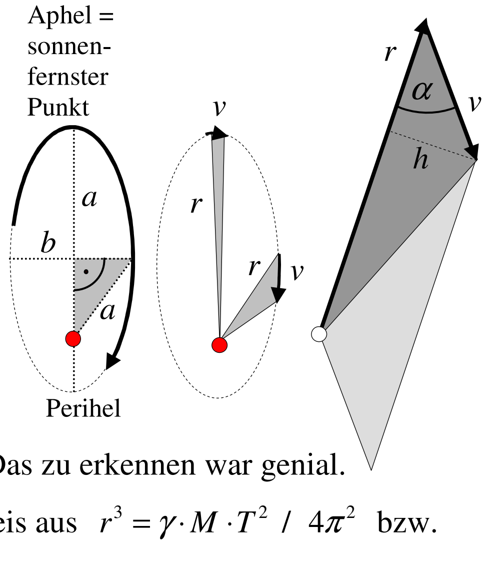
Zweites Keplersches Gesetz
Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

Drittes Keplersches Gesetz
Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der *großen* Halbachsen ihrer Bahnellipsen.

Kepler beschrieb die Bahnen zutreffend. Doch erst *Newton* konnte diese Bahnform mathematisch beweisen. Er erkannte darüber hinaus, dass auch Parabel- und Hyperbelbahnen möglich sind.



Wir können die Kreis- und Ellipsenbahn ganz einfach durch den reibungsfreien Lauf einer Kugel in einem Trichter veranschaulichen, welcher die Form des W_{pot}-Trichters von AB7 hat. Wirft man die Kugel *rechtwinklig* ein, so durchläuft sie eine *Kreisbahn*. Wirft man sie *schräg* ein, so läuft die Kugel, von oben betrachtet, auf einer *Ellipsenbahn*, deren einer Brennpunkt das Trichterloch ist. Das Trichterloch wird mit hoher Geschwindigkeit eng umlaufen, weil die Kugel dort absinkt. Am Rand steigt die Kugel auf und wird somit langsam. Das Geschwindigkeitsverhalten entspricht genau dem 2. Keplerschen Gesetz, wonach der *Perihel*, als sonnennächster Punkt am schnellsten und der *Aphel*, als sonnenfernster Punkt am langsamsten durchlaufen wird. Die Keplerschen Gesetze gelten auch für die Kreisbahnen, denn die Kreisbahn ist ein Spezialfall der Ellipsenbahn, bei der die Halbachsen zum Radius und die Brennpunkte zum Mittelpunkt zusammen fallen.



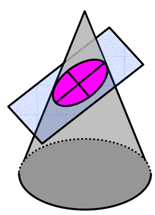
Das zweite Gesetz heißt auch *Flächensatz*.
Heute begründet man den Flächensatz mit dem *Drehimpulserhaltungssatz*, den Kepler noch nicht kannte.
Der Betrag des Drehimpulses L ist das Produkt von Hebelarm r, Geschwindigkeit v und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels α, also bleibt der Ausdruck $L = r \cdot v \cdot \sin\alpha$ bei der Drehbewegung konstant. Geometrisch gesehen ist aber $v \cdot \sin\alpha = h$ die Höhe des nebenstehenden Parallelogramms mit der Grundseite r, sodass der Flächeninhalt $r \cdot h$ des Parallelogramms während der Drehung gleich bleibt. Demnach bleibt auch der *halbe* Flächeninhalt *gleich*. Das ist aber genau der vom Kepler postulierte, vom Fahrstrahl überstrichene, Flächeninhalt. Das zu erkennen war genial.

Das dritte Keplersche Gesetz haben wir in AB6 für den Kreis aus $r^3 = \gamma \cdot M \cdot T^2 \;/\; 4\pi^2$ bzw.

$r^3 = \dfrac{\gamma \cdot M}{4\pi^2} \cdot T^2$ schon hergeleitet. Dort gilt bereits, dass T^2 proportional zu r^3 ist.

3) Überblick: Mögliche Planetenbahnen, Kegelschnitte

Die *möglichen* Bahnen einer Masse m um die Zentralmasse M sind 1) der Kreis 2) die Ellipse 3) die ins Unendlich gehende Parabel und 4) die asymptotisch aus dem Unendlich kommende und dorthin zurücklaufende Hyperbel. Interessanterweise erhält man alle diese Kurven durch geeignetes Schneiden eines Kegels mit einer Ebene. Für den Kreis steht die Schnittebene senkrecht zur Kegelachse, für die Ellipse ist die Schnittebene flacher, für die Parabel gleich und für die Hyperbel steiler als die Mantelsteigung.



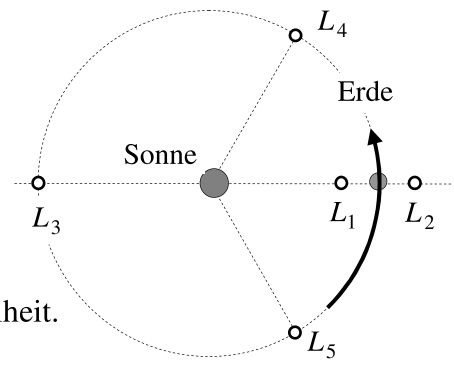
Dieser Kegelschnitt liefert eine Ellipse.

Aufgaben.

1) **Kepler 3**: Bei der Suche nach unbekannten, möglicherweise gefährlichen Himmelskörpern, welche die Sonne umlaufen und die Erdbahn kreuzen fand man den Kometen C 2014 /C3 auf einer elliptischen Bahn mit der Umlaufzeit $T = 1129\,Jahre$ und dem sonnenfernsten (Aphel) Abstand $\overline{AS} = 3,216 \cdot 10^{10}\,km$. Untersuche, ob der Komet eine Bedrohung für die Erde darstellt.

2) **Lagrange-Punkte**

Interessant für die Wissenschaft sind die *fünf* konstant z.B. mit der Erde um die Sonne rotierenden kräftefreien *Lagrange-Punkte*, weil man dort Satelliten parken kann. L_3, L_4 und L_5 liegen auf einem gleichseitigen Dreieck und haben zur Sonne die gleiche Entfernung R_{ES} wie die Erde. L_1 und L_2 liegen vor bzw. hinter der Erde.

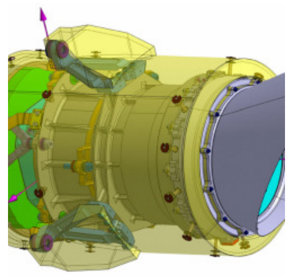


a) Erkläre mit Schwerpunkt und Zentripetalkraft die Kräftefreiheit.

b) Das zukünftige Weltraumteleskop PLATO soll künftig, durch die Erde von der Sonnenstrahlung abgeschirmt in den Lagrange-Punkt L_2 die kosmische Hintergrundstrahlung messen.

Zeige, dass L_2 in einer Entfernung von $R_{EP} = 1,5 \cdot 10^9\,m$ hinter der Erde liegt. $\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11}\,N \cdot m^2 / kg^2$

Es gilt $m_{\text{PLATO}} = 2150kg$, $M_E = 5,97 \cdot 10^{24}\,kg$, $M_S = 1,99 \cdot 10^{30}\,kg$., $R_{ES} = 149,6 \cdot 10^9\,m$ ..

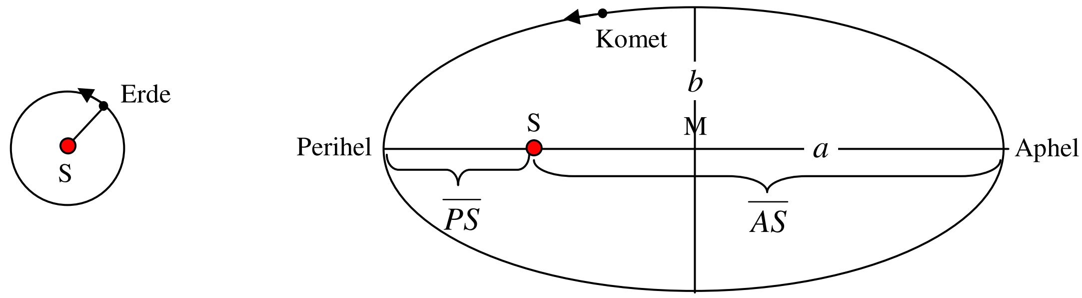


Lösungen

1) Da Komet und Erde das *gleiche* Zentralgestirn, nämlich die Sonne, umkreisen gilt für sie das 3. Keplersche Gesetz $T_1^2 / T_2^2 = a_1^3 / a_2^3$. Wählen wir als „Planeten 1" den Kometen und als Planeten 2 die Erde, so gilt für die Umlaufzeit des Kometen $T_1 = 1129\,Jahre$. Die große Halbachse $a_1 = a = ?$ des Kometen ist gesucht. Für die Erde gilt $T_2 = 1\,Jahr$, $a_2 = R_{ES} = 1,496 \cdot 10^8\,km$.

Umschreiben des 3. Keplerschen Gesetzes $\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \,\Big|\, \sqrt[3]{\ldots}$ ergibt $\frac{a_1}{a_2} = \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_2^2}}$ bzw.

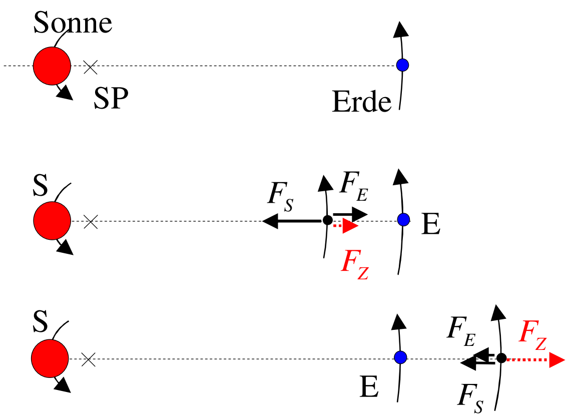
$a_1 = a_2 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_2^2}}$. Also hat die gr. Halbachse $a = 1,496 \cdot 10^8\,km \cdot \sqrt[3]{\frac{(1129\,J)^2}{(1\,J)^2}} = 1,622 \cdot 10^{10}\,km$.

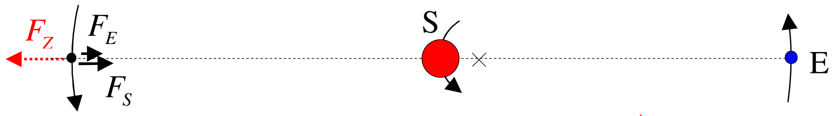


Nun können wir den gefährlichen, sonnennächsten Abstand, den Perihel, des Kometen errechnen: $\overline{PS} = 2 \cdot a - \overline{AS} = 2 \cdot 1,622 \cdot 10^{10}\,km - 3,216 \cdot 10^{10}\,km = 0,028 \cdot 10^{10}\,km = 280 \cdot 10^6\,km$.

Das ist aber deutlich größer als $R_{ES} = 1,496 \cdot 10^8\,km = 149,6 \cdot 10^6\,km$. Also droht keine Gefahr.

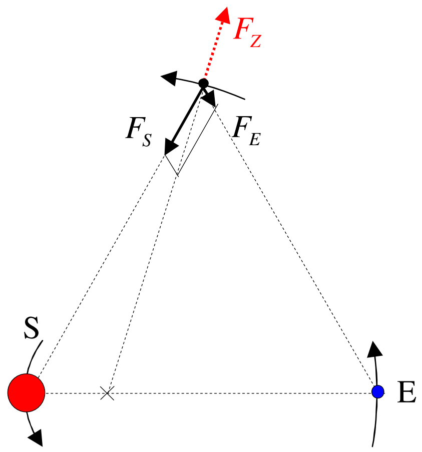
2) a) Beachte zunächst, dass Erde und Sonne um ihren gemeinsamen Schwerpunkt kreisen, auch wenn dieser innerhalb der Sonne liegt. Der Satellit an einem der *L*-Punkte wird daher ebenfalls um diesen Schwerpunkt kreisen und somit der nach außen gerichteten Zentrifugalkraft $F_Z = m v^2 / r$ unterliegen. Da die Geschwindigkeit *v* allen Positionen gleich der Erdgeschwindigkeit ist und die Satellitenmasse *m* auch gleich sein soll, gilt $F_Z = k / r$. Bei L_1 sind F_S und F_E entgegen gerichtet, es gilt $F_S = F_E + F_Z$. Bei L_2 und L_3 sind F_S und F_E gleich gerichtet es gilt $F_S + F_E = F_Z$.





In den Positionen L_4 und L_5 ist F_Z so gerichtet, dass die vektorielle Kräftesumme von F_S und F_E kompensiert wird.

Bemerkung: In L_1 bzw. L_2 sind instabil, sodass ein Satellit dort mit minimalem Korrekturaufwand die Sonne bzw. die von der Sonne abgeschirmt die kosmische Hintergrundstrahlung beobachten kann. L_4 und L_5 sind stabil, so dass sich dort von sich aus kleine Körper sammeln, welche man Trojaner nennt.



b) Die Entfernung der Sonde von der Sonne soll $R_{SP} = 149{,}6 \cdot 10^9 m + 1{,}5 \cdot 10^9 m = 151{,}1 \cdot 10^9 m$.

Somit gilt $F_{SP} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M_S}{R_{SP}^2} = 12{,}505\,N$. Entsprechend $F_{EP} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M_E}{R_{EP}^2} = 0{,}381\,N$. Die Kräfte sind gleichgerichtet. Also wirkt insgesamt die Gravitationskraft $F_{SP} + F_{EP} = 12{,}878\,N$ auf die Sonde. Die Umlaufzeit *T* der Sonde ist genauso groß wie die der Erde, aber der Radius ist größer. Also gilt $v_{\text{PLATO}} = 2\pi \cdot R_{SP} / 1a = 2\pi \cdot R_{SP} / 31557600 s = 30084{,}3\, m/s$.

Damit hat die nach außen treibende Zentrifugalkraft den Wert $F_Z = m \cdot v_{\text{PLATO}}^2 / R_{SP} = 12{,}878\,N$.

Das stimmt mit $F_{SP} + F_{EP}$ überein. Also ist die Sonde kräftefrei.