E) Energie eines Satelliten auf der Kreisbahn.

1) Gesamtenergie eines Satelliten auf einer Kreisbahn.

Die Gesamtenergie W_{Ges} ist *grundsätzlich* die Summe aus der kinetischen Energie W_{kin} und der potentiellen Energie W_{pot}. Während für die kinetische Energie *immer* die Formel $W_{kin} = ½ \cdot m v^2$ gilt, hängt die potentielle Energie davon ab, welche innere Kaft am Physikalia-schen System zu überwinden ist. Ist die innere Kraft die Schwerkraft $F_G = -m \cdot g$ in Bodennähe, dann gilt $W_{pot} = m \cdot g \cdot h$. Will man hingegen eine Masse m vom Erdboden, also vom Abstand R_E vom Erdmittelpunkt, auf eine Umlaufbahn mit größerem Radius r heben, dann reicht die Formel $F_G = -m \cdot g$ nicht mehr. Dann muss sie durch $F_G = -m \gamma M / r^2$ ersetzt werden. (Siehe AB7). Für die Hubarbeit bzw. für die potentielle Energie gilt dann $W_{pot} = -\gamma m M / r$.
In der Formel $W_{pot} = m \cdot g \cdot h$ zählt man die Höhe h normalerweise vom Fußboden des Raumes aus. Hebt man etwas vom Fußboden auf, so ist W_{pot} gemäß $W_{pot} = m \cdot g \cdot h$ *positiv*. Lässt man hingegen etwas in den Keller fallen, so hat die Masse dort entsprechend eine *negative* potentielle Energie. Bei der Formel $W_{pot} = -\gamma m M / r$ ist alles „Keller“. Der „Fußboden“ liegt hier im Unendlichen. Erst dort ist m frei von der Anziehungskraft der Masse M. Also ist W_{pot} für *alle* im Endlichen verlaufenden Satellitenbahnen *negativ*. W_{kin} hingegen ist grundsätzlich ≥ 0.

Frage: Welche Energie dominiert, das *negative* W_{pot} oder das *positive* W_{kin} ?

Antwort: Das hängt davon ab. Wir betrachten einen Satelliten im Abstand r vom Erdmittelpunkt. Dann steht der negative Wert der potentiellen Energie $W_{pot} = -\gamma m M / r$ fest. Die kinetische Energie hingegen kann *alle* Werte ≥ 0 haben.

a) Ist $W_{kin} = 0$, so stürzt der Satellit senkrecht auf die Erde.

b) Ist W_{kin} größer als $+\gamma m M / r$, dann ist die Gesamtenergie *positiv* und der Satellit kann die Erde auf nimmer Wiedersehen verlassen.

c) Nun die stabile Kreisbahn des Satelliten der Masse m um die Erde mit Masse M: Aus AB5 und AB6 wissen wir, dass die Umlaufgeschwindigkeit v für die stabile Kreisbahn genau $v = \sqrt{r \cdot G}$ bzw. $v = \sqrt{\cancel{r} \cdot \left(\gamma \cdot M / r^{\cancel{2}}\right)} = \sqrt{\gamma \cdot M / r}$ sein muss. Andernfalls stürzt der Satellit ab oder fliegt davon. Wieviel kinetische Energie hat der Satellit mit dieser Geschwindigkeit? Wir setzen v in $W_{kin} = ½ \cdot m \cdot v^2$ ein:

$$W_{kin} = ½ \cdot m \cdot \left(\sqrt{\gamma \cdot M / r}\right)^2 = ½ \cdot m \cdot \ (\gamma \cdot M / r) = \frac{1}{2} \cdot \boxed{\frac{\gamma \cdot m \cdot M}{r}}.$$

Der Term $\boxed{\frac{\gamma \cdot m \cdot M}{r}}$ steht aber auch in W_{pot}. Dort gilt $W_{pot} = -\boxed{\frac{\gamma \cdot m \cdot M}{r}}$.

Das positive W_{kin} gleicht das negative W_{pot} demnach *exakt zur Hälfte* aus:

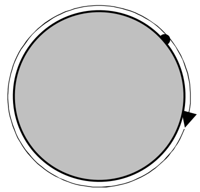
$$\underline{\underline{W_{ges}}} = W_{kin} + W_{pot} = +\frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma \cdot m \cdot M}{r} - \frac{\gamma \cdot m \cdot M}{r} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma \cdot m \cdot M}{r}}}.$$

Auf der stabilen Kreisbahn dominiert das negative W_{pot}.
Das positive W_{kin} gleicht das negative W_{pot} lediglich zur Hälfte aus.

Die Gesamtenergie der stabilen Kreisbahn ist negativ.

2) Startgeschwindigkeit von Raketen

a) Erste Kosmische Bahn. Eine abgeschossene Gewehrkugel fällt zum Erdboden zurück. Eine militärische Rakete überfliegt einen gewissen Kreisbogen der Erdkugel und schlägt dann ebenfalls wieder auf. Mit welcher *Startgeschwindigkeit* muss eine Rakete abgeschossen werden, um eine Umlaufbahn, ein Orbit, zu erreichen? Bereits in seinem zweiten Traum (AB2) sah Newton die Lösung vor dem inneren Auge. Der Apfel braucht die seitliche Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{g \cdot R_E}$ damit der Krümmungskreis seiner Wurfparabel mit dem Erdkreis übereinstimmt. Dann bleibt der Apfel oben. Auch niedrig fliegende Raumstationen, wie die ISS, umkreisen die Erde in etwa mit dieser Geschwindigkeit. Zwar verläuft dieses *minimale Orbit* nur in „null Metern Höhe“ über dem Erdboden, dennoch nennt man dieses Orbit „**Erste *Kosmische* Umlaufbahn**“ und die dafür erforderliche Geschwindigkeit „**Erste *Kosmische* Geschwindigkeit**“, weil sich auf dieser Bahn erstmals Schwerkraft und Zentrifugalkraft *aufheben.* Der Astronaut ist auf dieser Bahn in seiner Kapsel *kräftefrei*. Das Essen schwebt auf dem Teller und Verdauungsprodukte wollen nicht freiwillig in die Toilette fallen.



1. kosm. Bahn in der Höhe $h \approx 0$

Die Abschussgeschwindigkeit der Rakete für die *Erste kosmische Bahn* ist *genauso groß*, wie die erste kosmische Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{g \cdot R_E}$ selbst.

Der Grund: *Vor dem Start* steht die Rakete am Boden. Die 1. Kosmische Bahn verläuft *ebenfalls* auf Bodenhöhe. Einen Zuwachs an *potentieller Energie* benötigt die Rakete also *nicht*.

Für die Umlaufgeschwindigkeit gilt $v = \sqrt{r \cdot G} = \sqrt{\gamma \cdot M / r}$. Für die 1. kosmische Bahn mit $R = R_E$ und $G = g$ folgt dann Newtons Formel $v_1 = \sqrt{g \cdot R_E}$ bzw. $\boxed{v_{1.kosm} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M_E}{R_E}}}$.

b) Umlaufbahn mit belibigem Radius r.

Vor dem Start steht die Rakete (mit der Masse *m*) wieder am Boden und ihre Geschwindigkeit ist (bei Vernachlässigung der Eigendrehung der Erde) wieder gleich null.

Vor dem Start gilt also $W_{pot,0} = W_{pot}(R_E) = -\gamma m M_E / R_E$ und $W_{kin,0} = 0$.

Die Gesamtenergie vor dem Start beträgt also $W_0 = -\gamma m M_E / R_E$.

Auf der Umlaufbahn mit Radius r **muss** $W_{kin}(r) = +½ \cdot \gamma m M / r$ und $W_{pot}(r) = -\gamma m M / r$ sein. Zusammen **muss** für die *Gesamtenergie* auf der Umlaufbahn also $W_1 = -½ \cdot \gamma m M_E / r$ gelten. Andernfalls ist die stabile Kreisbahn mit Radius r nicht zu halten.

Die *Energiedifferenz* $\Delta W = W_1 - W_0 = \left(-\frac{\gamma m M_E}{2r}\right) - \left(-\frac{\gamma m M_E}{R_E}\right) = \gamma m M_E \cdot \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{2 \cdot r}\right)$

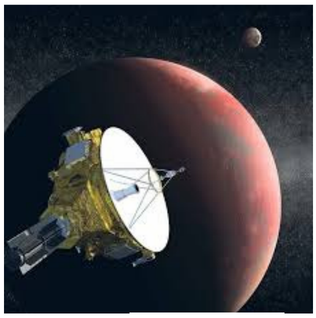
muss der Rakete beim Start als kinetische Energie $W_{Start} = ½ \cdot m \cdot v_{Start}^2$ durch die Triebwerke zugeführt werden: $\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{Start}^2 = \gamma \cancel{m} M_E \cdot \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{2 \cdot r}\right) \Big| \cdot 2$ ergibt $v_{Start}^2 = \gamma M_E \cdot \left(\frac{2}{R_E} - \frac{1}{r}\right)$.

Also: Startgeschwindigkeit für die Umlafbahn mit Radius r: $\boxed{v_{Start} = \sqrt{\gamma \cdot M_E \cdot \left(\frac{2}{R_E} - \frac{1}{r}\right)}}$.

c) **Bahnänderung** von r_1 nach r_2.

Jetzt muss $\Delta W = W_2 - W_1 = \left(-\frac{\gamma m M_E}{2 r_2}\right) - \left(-\frac{\gamma m M_E}{2 r_1}\right) = \frac{\gamma m M_E}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ als kin. Triebwerksenergie $W_{Start} = ½ \cdot m \cdot v_{Start}^2$ zur Verfügung gestellt werden: $\boxed{v_{Start} = \sqrt{\gamma M_E \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}}$

d) Als **<u>Zweite kosmische Geschwindigkeit</u>** bezeichnet man diejenige Startgeschwindigkeit v_2, mit welcher eine Rakete bis ins *Unendliche* geschossen werden kann. Dann hat sie die Reichweite der Schwerkraft der Erde vollständig verlassen. Dort soll die Raumkapsel ohne weitere kinetische Energie „ruhen". Vor dem Start gilt $W_{pot,0} = -\gamma m M_E / R_E$ und $W_{kin,0} = 0$ also $W_0 = -\gamma m M_E / R_E$. Im Unendlichen gilt $W_{pot,1} = \lim_{r\to\infty}\left(-\gamma m M_E / r\right) = 0$ und $W_{kin,0} = 0$ also $W_1 = 0$. Die Energiedifferenz $\Delta W = W_1 - W_0 = = 0 - \left(-\frac{\gamma m M_E}{R_E}\right) = \frac{\gamma m M_E}{R_E}$ muss als $W_{Start} = \frac{1}{2} m v_{Start}^2$ zur Verfügung gestellt werden. Also $\boxed{v_{2.kosm} = \sqrt{2 \cdot \frac{\gamma \cdot M_E}{R_E}}}$.



Die Sonde New Horizons passiert den Pluto und verlässt anschließend unser Sonnensystem.

Ein Vergleich der ersten kosmischen Geschwindigkeit $v_{1.kosm} = \sqrt{\gamma \cdot M_E / R_E}$ und der zweiten kosmischen Geschwindigkeit $v_{2.kosm} = \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot M_E / R_E}$ zeigt, dass $v_{2.kosm}$ um den Faktor $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ mal größer ist als $v_{1.kosm}$. Es gilt also $v_{2.kosm} = \sqrt{2} \cdot v_{1.kosm}$.

<u>Bemerkung</u>: Für jeden Himmelskörper gibt je nach ihrer Masse und ihrem Radius kosmische Geschwindigkeiten.

<u>Aufgaben</u>

<u>Daten:</u> $\gamma = 6{,}672 \cdot 10^{-11} m^3 \;/\; kg \cdot s^2$; $M_E = 5{,}973 \cdot 10^{24} kg$; $R_E = 6{,}373 \cdot 10^6 m$

$M_S = 1{,}989 \cdot 10^{30} kg$; $R_{Sonne,Erde} = 1{,}496 \cdot 10^{11} m$

1) Erkläre, warum bei $W_{pot} = -\gamma m M / r$ alles „Keller" ist und der „Fußboden" im ∞ liegt.
2) Erläutere, was man unter der 1. und der 2. kosmischer Geschwindigkeit versteht.
3) Erkläre, warum die Bahngeschwindigkeit der 1. kosmischen Bahn mit der Startgeschwindigkeit einer Rakete für diese Bahn übereinstimmt.
4) Die potentielle Energie auf der Erdoberfläche beträgt $W_{pot}(R_E) = -\gamma m M_E / R_E$.
   Erkläre, warum für die kinetische Energie $W_{2.kosm} = ½ \cdot m \cdot v_{2.kosm}^2$ der zweiten kosmischen Geschwindigkeit genau $W_{2.kosm} = +\gamma m M_E / R_E$ gilt.
5) Erkläre, dass für alle Startgeschwindigkeiten v_{Start} für Umlaufbahnen $v_{1.kosm} \le v_{Start} < v_{2.kosm}$ gilt.
6) Beurteile, inwiefern die Startgeschwindigkeiten von der Masse *m* des Satelliten abhängen.
7) Vergleiche die beiden kosmischen Geschwindigkeiten $v_{2.kosm}$ und $v_{2.kosm}$.
8) Um einen Satelliten a) ganz aus dem Schwerkraftbereich der Erde hinaus zu schießen bzw. b) ihn in eine Umlaufbahn in „null" Metern über der Erdoberfläche zu schießen erfordert unterschiedliche Startgeschwindigkeiten. Wieviel % mehr Startgeschwindigkeit braucht man für a) im Vergleich zu b)?
9) Berechne den Wert der 1 und 2. kosmischen Geschwindigkeit für den Planeten Erde.
10) Nach AB6 gehört zur Umlaufzeit *T* einer Kreisbahn der Radius $r = \sqrt[3]{\gamma \cdot M \cdot T^2 \;/\; 4\pi^2}$.
    a) Zeige: Der Radius der **geostationären Bahn** mit $T = 24\,h$ beträgt $r_{Geo} = 42\,240{,}3\,km$.
    b) Berechne v_{Start} zum Erreichen der Geostationären Bahn vom Erdboden aus.
11) Berechne die erforderliche Startgeschwindigkeit für die New Horizons von der Umlaufbahn der Erde zum Verlassen des Sonnensystems und vergleiche mit d. 2. kosm. Geschw. der Erde.

Lösungen:

1) Für $W_{pot} = m \cdot g \cdot h$ ist der „Keller“ bzw. der „Fußboden“ das, wofür $W_{pot} < 0$ bzw. $W_{pot} = 0$ ist. Vergleich mit $W_{pot} = -\gamma m M / r$ zeigt: Für alle $r < \infty$ ist $W_{pot} < 0$ und für $r = \infty$ ist $W_{pot} = 0$.
2) 1. kosmischen Geschwindigkeit: Der Satellit umkreist den Planeten in „null Metern“ Höhe.
   2. kosmischen Geschwindigkeit: Der Satellit entfernt sich ins Unendliche.
3) Für die 1. kosmische Bahn fehlt keine potentielle Energie, da der Satellit auf Bodenhöhe bleibt. Deshalb braucht die kinetische Startenergie nur die kinetische Energie der Bahn liefern.
4) Die 2. kosmische Geschwindigkeit schießt den Satelliten von a) der Startrampe nach b) unendlich. Sowohl in a) als auch in b) ist die kinetische Energie gleich null. Deshalb braucht die kinetische Energie $W_{2.kosm} = ½ m v_{2.kosm}^2$ der 2. kosmischen Geschwindigkeit nur die Differenz der potentiellen Energie zwischen den Erdboden W_E und dem Unendlichen W_∞ bereit stellen. Weil aber $W_\infty = 0$ gilt, folgt $W_{2.kosm} = W_\infty - W_E = 0 - \left(-\gamma m M_E / R_E\right) = +\gamma m M_E / R_E$
5) $v_{1.kosm}$ führt auf „null Meter“ Höhe, $v_{2.kosm}$ führt ins Unendl. Alle Bahnen liegen dazwischen.
6) Ein größerer Satellit braucht zwar mehr Startenergie $W_{Start} = ½ \cdot m \cdot v_{Start}^2$. In $W_{pot} = -\gamma m M / r$, wie auch in $W_{kin} = ½ \cdot m \cdot \gamma \cdot M / r$ steht aber auch die Satellitenmasse *m*. lso kürzt *m* sich stets heraus. Also: *Alle* Startgeschwindigkeiten sind *unabhängig* von der Masse *m* des Satelliten.
7) Es gilt $v_{1.kosm} = \sqrt{\gamma \cdot M_E / R_E}$ und $v_{2.kosm} = \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot M_E / R_E}$. Also gilt $v_{2.kosm} = \sqrt{2} \cdot v_{1.kosm}$.
8) $v_{2.kosm}$ ist $41,4\%$ größer als $v_{1.kosm}$.
9) $v_{1.kosm} = 7\,908,3 m/s$; $v_{2.kosm} = 11\,184,1 m/s$
10) Oiu $r_{Geo} = \sqrt[3]{\gamma \cdot M \cdot T^2 \ / \ 4\pi^2} = 42\ 240\ 313,2m$. $v_{Start} = \sqrt{\gamma \cdot M_E \cdot \left(2/R_E - 1/r_{Geo}\right)} = 10754 m/s$
11) $v_{Start} = \sqrt{\gamma M_S \cdot \left(1/R_{Sonne,Erde} - 1/\infty\right)} = 29786 m/s$; $v_{2.kosm} = 11\,184,1 m/s$