C) Kreisbewegung von Körpern im Gravitationsfeld

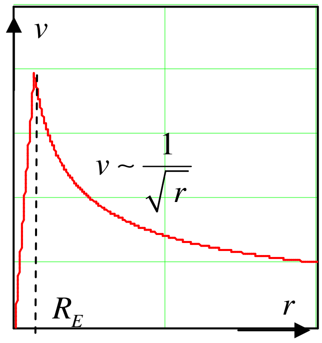
2) Bahnberechnung

a) Einführung Damit ein leichter Körper (Apfel, Satellit, Mond) einen schweren Körper (Erde) um**kreisen** kann, muss seine Umlaufgeschwindigkeit genau den Wert $v=\sqrt{r\cdot G}$ besitzen. Nimmt die Geschwindigkeit z.B. durch Reibung mit Luftpartikeln ab, so dass v kleiner als $\sqrt{r\cdot G}$ wird, so stürzt der Satellit letztlich ab. Wird kurz ein Triebwerk gezündet und v somit größer als $\sqrt{r\cdot G}$, so gelangt der Satellit auf eine höhere Bahn oder fliegt sogar ganz davon.

Aber Achtung: Beim Aufstieg zur höheren Umlaufbahn verliert der Satellit die Zusatzgeschwindigkeit und wird sogar langsamer als zuvor. Dem Satelliten ergeht es nicht anders als einem hochgeworfenen Stein, der beim Aufstieg ebenfalls seine Geschwindigkeit verliert.

Setzen wir in die Geschwindigkeitsformel $v=\sqrt{r\cdot G}$ die Formel $G=\frac{\gamma\cdot M_E}{r^2}$ ein, so erkennen wir, auf welche Weise v mit wachsendem r kleiner wird: $v=\sqrt{\cancel{r}\cdot\frac{\gamma\cdot M_E}{r^{\cancel{2}}}}=\sqrt{\frac{\gamma\cdot M_E}{r}}$,

also: $\boxed{v\sim 1/\sqrt{r}}$. Mit $M_E\approx 6\cdot 10^{24}\,kg$ für die Erdmasse und für die Gravitationskonstante $\gamma=6{,}673\cdot 10^{-11}\ m^3/kg\cdot s^2$ (Cavendish), ergibt sich die Geschwindigkeit



Umlaufgeschwindigkeit eines Satelliten als Funktion des Bahnradius

$v(r)=\sqrt{\frac{\gamma\cdot M_E}{r}}=\frac{\sqrt{\gamma\cdot M_E}}{\sqrt{r}}\approx\frac{2\cdot 10^7}{\sqrt{r}}\ \frac{m}{s}$ für den Satelliten auf seiner Kreisbahn mit Radius r.

Probe: Was liefert diese Formel für den „rasenden Apfel“?
Dazu setzen wir für den variablen Abstand r den „Newton-Kopfrechnen-Erdradius“

$R_E=6\,400\,000\,m$ ein und erhalten $v(R_E)\approx\frac{2\cdot 10^7}{\sqrt{R_E}}=\frac{2\cdot 10^7}{\sqrt{6{,}4\cdot 10^6}}\frac{m}{s}=7\,908\frac{m}{s}\approx 8\,000\frac{m}{s}$.

Das war genau die 1. kosmische Geschwindigkeit, wie Newton sie schon errechnet hatte ✓.

Die Abbildung zeigt, dass die Umlaufgeschwindigkeit für zunehmend größere Umlaufkreise geringer wird und zwar nimmt sie mit der Wurzel des Radius ab. Die Satellitengeschwindigkeit auf einer Bahn mit *sechzehn*fachem Erdradius ist also nur ein Viertel der 1. kosmischen Geschwindigkeit, weil $\sqrt{16}=4$ ist. Die Umlaufgeschwindigkeit des Mondes ist etwas schneller als ein *Achtel* der 1. kosmischen Geschwindigkeit, also etwas schneller als $1000\,m/s$, denn der Mond ist ja 60 und nicht 64 Erdradien vom Erdmittelpunkt entfernt und $\sqrt{64}=8$ gilt.

Für das Verständnis tritt hier jedoch ein *Rätsel* auf:
Auf einer größeren Umlaufbahn hat der Satellit eine höhere Energie, das ist klar: Man braucht stärkere Raketen, um ihn dort hin zu schießen. Aber seine Geschwindigkeit, seine kinetische Energie, die ist auf der höheren Umlaufbahn geringer. Wie kann das sein?
Des Rätsels Lösung: Mit dem Aufstieg auf eine höhere Umlaufbahn nimmt die potentielle Energie *mehr* zu, als die kinetische Energie *abnimmt*. Wir lernen später, dass die potentielle Energie sogar exakt *doppelt* so stark zunimmt, wie die kinetische Energie abnimmt.

b) Berechnung
In die Formeln einer Satellitenkreisbahn gehen *fünf* Größen ein. Die Größen γ = Gravitationskonstante und M = Masse des umkreisten Himmelskörpers sind *feste* Größen. Der Radius r der Umlaufbahn, die Umlaufgeschwindigkeit v, sowie die Umlaufzeit T hingegen sind *variable* Größen. Die Gleichung $\boxed{1}$ $\boxed{v=\sqrt{\gamma\cdot M/r}}$ verbindet v und r, sodass die Kenntnis von r

die Größe v nach sich zieht. Umstellen nach r ergibt die Formel $\boxed{2}$ $\boxed{r=\gamma\cdot M/v^2}$.

Desweiteren haben wir Formel $\boxed{7}$ $v=2\pi r/T$. Umgestellen ergibt $\boxed{8}$ $r=T\cdot v/2\pi$.

<u>Kombiniere $\boxed{1}$ und $\boxed{7}$:</u> Gleichsetzen, quadrieren $\sqrt{\frac{\gamma\cdot M}{r}}=\frac{2\pi r}{T}\ \Big|\ \left(\ldots\right)^2\ \Big|\ \cdot r\ \Big|\ \cdot T^2$, umformen ergibt $\gamma\cdot M\cdot T^2=4\pi^2r^3$. Das ergibt $T^2=\frac{4\pi^2r^3}{\gamma\cdot M}$ bzw. Formel $\boxed{3}$ $\boxed{T=\sqrt{\frac{4\pi^2r^3}{\gamma\cdot M}}}$

oder $\gamma\cdot M\cdot T^2=4\pi^2r^3$ bzw. $r^3=\frac{\gamma\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}$ bzw. $\boxed{4}$ $\boxed{r=\sqrt[3]{\frac{\gamma\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}}}$

<u>Kombiniere $\boxed{2}$ und $\boxed{8}$:</u> Gleichsetzen $\frac{\gamma\cdot M}{v^2}=\frac{T\cdot v}{2\pi}\ \Big|\ \cdot v^2\ \Big|\ :T$ ergibt $\frac{\gamma\cdot M}{T}=\frac{v^3}{2\pi}$.

Umstellen nach T bzw. v ergibt $\boxed{5}$ $\boxed{T=\frac{2\pi\cdot\gamma\cdot M}{v^3}}$ und $\boxed{6}$ $\boxed{v=\sqrt[3]{\frac{2\pi\cdot\gamma\cdot M}{T}}}$

c) <u>Die Proportionalitäten der Größen führen zu Gleichungen für die Vergrößerungsfaktoren</u>

Aus den Formeln $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ und $\boxed{6}$ lesen wir die Proportionalitäten ab und übertragen diese auf die Vergrößerungsfaktoren.

Proportionalitäten der Größen		
	Gesucht	Gesucht
Geg. r	$\boxed{1}$ $v\sim\frac{1}{\sqrt{r}}$	$\boxed{3}$ $T\sim\sqrt[2]{r^3}$
Geg. v	$\boxed{2}$ $r\sim\frac{1}{v^2}$	$\boxed{5}$ $T\sim\frac{1}{v^3}$
Geg. T	$\boxed{4}$ $r\sim\sqrt[3]{T^2}$	$\boxed{6}$ $v\sim\frac{1}{\sqrt[3]{T}}$

Gleichungen für die Vergrößerungsfaktoren		
Geg:Vergr. Faktoren	Gesucht	Gesucht
Geg. sind r_2 und r_1 Dann folgt $f_r=\frac{r_2}{r_1}$	$f_v=\frac{1}{\sqrt{f_r}}$	$f_T=\sqrt[2]{f_r^3}$
Geg. sind v_2 und v_1 Dann folgt $f_v=\frac{v_2}{v_1}$	$f_r=\frac{1}{f_v^2}$	$f_T=\frac{1}{f_v^3}$
Geg. sind T_2 und T_1 Dann folgt $f_T=\frac{T_2}{T_1}$	$f_r=\sqrt[3]{f_T^2}$	$f_v=\frac{1}{\sqrt[3]{f_T}}$

Frage: Wozu sind die Faktoren gut?

Antwort: Hat man für einen Planeten (z.B. die Erde) die Daten einer **ersten** Bahn, so kann man mit Hilfe der Faktoren ganz leicht die Daten einer **zweiten Bahn** berechnen.

d) <u>Beispiel.</u> Verwende $R_E=6{,}36\cdot10^6m$; $M_E=5{,}97\cdot10^{24}kg$; $\gamma=6{,}673\cdot10^{-11}\ m^3/kg\cdot s^2$.

Die **erste Bahn** soll die 1. kosmische Bahn sein: $r_1=R_E=\underline{\underline{6{,}36\cdot10^6m}}$.

Für die erste Bahn müssen alle Daten errechnet werden:

Formel $\boxed{1}$: $v_1=\sqrt{\frac{\gamma\cdot M}{r_1}}=\sqrt{\frac{6{,}673\cdot10^{-11}\ m^3/kg\cdot s^2\cdot5{,}97\cdot10^{24}kg}{6{,}36\cdot10^6m}}=\underline{\underline{7914{,}4m/s}}$

Formel $\boxed{3}$ $T_1=\sqrt{\frac{4\pi^2r_1^3}{\gamma\cdot M}}=\sqrt{\frac{4\pi^2\cdot\left(6{,}36\cdot10^6m\right)^3}{6{,}673\cdot10^{-11}\ m^3/kg\cdot s^2\ \cdot\ 5{,}97\cdot10^{24}kg}}=\underline{\underline{5049{,}1s}}$

Nun können alle Varianten einer **zweiten Bahn** um die Erde errechnet werden:

i) Die **zweite Bahn** soll den Radius $r_2=25{,}44\cdot10^6m$ haben.

Dann ist der Faktor der Radiusvergrößerung $f_r = \frac{r_2}{r_1} = \frac{25,44 \cdot 10^6 m}{6,36 \cdot 10^6 m} = 4$

Daraus folgt der Faktor der Geschwindigkeitsvergrößerung $f_v = \frac{1}{\sqrt{f_r}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Also $v_2 = 0,5 \cdot v_1 = 0,5 \cdot 7914,4\, m/s = \underline{\underline{3957,21 m/s}}$

Entsprechend die Umlaufzeitvergrößerung $f_T = \sqrt[2]{f_r^{\,3}} = \sqrt{4^3} = 8$ und $T_2 = 8 \cdot T_1 = \underline{\underline{40,393 \cdot 10^3 s}}$

ii) Die **zweite Bahn** soll die Bahngeschwindigkeit $v_2 = 3957,211 m/s$ haben.

Dann ist der Faktor der Geschwindigkeitsvergrößerung $f_v = \frac{v_2}{v_1} = 0,5$ und $f_r = \frac{1}{f_v^{\,2}} = \frac{1}{0,5^2} = 4$

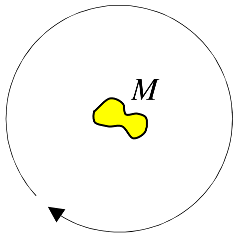
und $r_2 = 4 \cdot r_1 = \underline{\underline{25,44 \cdot 10^6 m}}$, sowie $f_T = \frac{1}{f_v^{\,3}} = \frac{1}{0,5^3} = 8$ und $T_2 = 8 \cdot T_1 = \underline{\underline{40,393 \cdot 10^3 s}}$

iii)Die **zweite Bahn** soll die Umlaufzeit $T_2 = 40393,157 s$ haben.

Daraus folgt $f_T = 8$ und somit $f_r = \sqrt[3]{f_T^{\,2}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$ und daher $r_2 = \underline{\underline{2,544 \cdot 10^7 m}}$

Und $f_v = \frac{1}{\sqrt[3]{f_T}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0,5$ und damit $v_2 = \underline{\underline{3,957 \cdot 10^3 m/s}}$

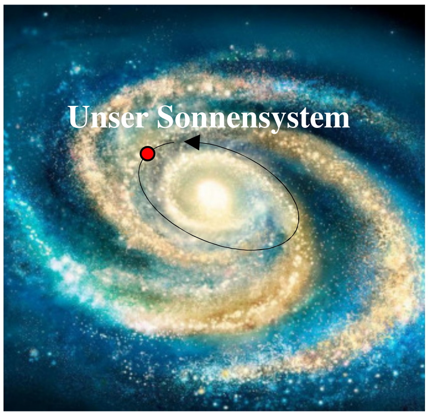
iv) <u>Massenbestimmung</u> Die Masse eines unbekanten Himmelskörpers lässt sich aus den Umlaufdaten eines Satelliten errechnen: Die Sonde Rosetta umkreiste nach der Ankunft den Kometen 67P/Tschurjumow-Gerassimenko auf einer Kreisbahn vom Radius $r = 22,5 km$ mit der Geschwindigkeit $v = 0,172 m/s$. also noch viel langsamer als ein Fußgänger. Mit der Formel $\boxed{M = r \cdot v^2 / \gamma}$



ergibt sich $M = \frac{v^2 \cdot r}{\gamma} = \frac{(0,172 m/s)^2 \cdot 22500m}{6,673 \cdot 10^{-11}\ m^3/kg \cdot s^2} = 9,975 \cdot 10^{12} kg$

<u>**Aufgaben**</u>:

1) Benenne, wann ein Satellit einen Zentralkörper auf einer stabilen Kreisbahn umläuft.
2) Erläutere, welche Konsequenz die Kreisbahnbedingung für die Umlaufgeschwindigkeit hat.
3) Erkläre durch eine Überschlagsrechnung, dass die Umlaufgeschwindigkeit des Mondes etwa ein Achtel der Ersten Kosmischen Geschwindigkeit beträgt.
4) Skizziere den Graphen, welcher von v als Funktion von r. .
5) Verwende $R_E = 6,36 \cdot 10^6 m$; $M_E = 5,97 \cdot 10^{24} kg$ und $\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11}\ m^3/kg \cdot s^2$.
   a) Gegeben ist $r_2 = 9 \cdot R_E$. Berechne v_2 und T_2.
   b) Gegeben ist $v_2 = 1500 m/s$. Berechne r_2 und T_2.
   c) Gegeben ist $T_2 = 162000 s$. Berechne r_2 und v_2.



6) Alle Sonnensysteme einer Galaxis umkreisen deren Zentrum, so wie die Planeten die Sonne umkreisen. Die sichtbare bzw. nachweisbare Masse unserer Galaxis beträgt $M_{sichtbar} = 8 \cdot 10^{41} kg$. Außenradius $= R_G = 6 \cdot 10^{20} m$.
   a) Berechne die Umlaufgeschwindigkeit v eines Sonnensystems im äußeren Bereich der Milchstraße.
   b) Für die äußeren Sonnensysteme ergeben Messungen jedoch die Umlaufgeschwindigkeit $v \approx 10^6 m/s$, welche viel größer als die in a) berechnete ist. Daraus wurde auf unsichtbare „Dunkle Materie“ geschlossen. Berechne, wieviel Prozent Dunkle Materie unsere Galaxis auf Grund dieser Überlegung enthält.

Lösungen

1) Zwischen der Umlaufgeschwindigkeit v und dem Bahnradius r muss die Beziehung $v=\sqrt{r\cdot G}$ bestehen. Dabei hängt die Gravitationsfeldstärke G ebenfalls von r ab.
Es gilt $G=\gamma\cdot M/r^2$. Setzt man das ein, so stellt sich die Zwangsbeziehung zwischen v und r dar als $v=\sqrt{\gamma\cdot M/r}$. Quadrieren ergibt die Form $v^2=\gamma\cdot M/r$ bzw. $v^2\cdot r=\gamma\cdot M$.

2) Nur wenn die Bedingung $v=\sqrt{r\cdot G}$ bzw. $v^2=\gamma\cdot M/r$ für die Geschwindigkeit v strikt eingehalten wird, bleibt der Satellit auf seiner stabilen Kreisbahn. Weicht v von dem durch diese Bedingung gegebenen Wert ab, so gelangt der Satellit auf eine niedrigere bzw. höhere Bahn und stürzt dabei möglicherweise ab bzw. fliegt davon.

3) Gemäß der Gleichung $v=\sqrt{\gamma\cdot M/r}=\sqrt{\gamma\cdot M}\;/\sqrt{r}\sim 1/\sqrt{r}$ ist die Umlaufgeschwindigkeit v proportional zu $1/\sqrt{r}$, also zum Kehrwert der Wurzel aus r.
Der „rasende Apfel" ist *einen* Erdradius von Erdmittelpunkt entfernt und seine Geschwindigkeit ist die 1. kosmische Geschwindigkeit. Der Mond ist *sechzig* Erdradien vom Erdmittelpunkt entfernt. Wäre der Mond 64 Erdradien vom Erdmittelpunkt entfernt, so wäre seine Geschwindigkeit $1/\sqrt{64}=1/8$ der 1. kosmischen Geschwindigkeit. Da er etwas näher an der Erde ist, ist seine Geschwindigkeit etwas größer als 1/8 der 1. kosm.Geschw..

4) Skizze: Siehe S. 1.

5) Ausgangspunkt ist die 1. kosmische Geschwindigkeit
$v_1=7914{,}4\,m/s$ für die Bahn mit $r_1=R_E=6{,}36\cdot 10^6\,m$ und der Umlaufzeit $T_1=5049{,}1\,s$

a) <u>Gegeben</u>: $r_2=9\cdot R_E$: Gegeben ist somit auch der Faktor für r: $\underline{fr=r_2/r_1=9}$

Der Faktor für v beträgt $fv=\sqrt{1/fr}=\sqrt{1/9}=1/3$. Also $v_2=0{,}\bar{3}\cdot v_1=\underline{\underline{2638{,}1\,m/s}}$.

Der Faktor für T beträgt $fT=\sqrt{fr^3}=\sqrt{9^3}=27$. Also $T_2=27\cdot T_1=\underline{\underline{136325{,}7\,s}}$.

b) <u>Gegeben</u> $v_2=1500\,m/s$. Gegeben ist ist somit auch der Faktor für v: $\underline{fv=v_2/v_1=0{,}1895}$

Der Faktor für r beträgt $fr=1/fv^2=27{,}839$. Also $r_2=27{,}839\cdot r_1=\underline{\underline{177056\cdot 10^6\,m}}$.

Der Faktor für T beträgt $fT=1/fv^3=146{,}886$. Also $T_2=146{,}886\cdot T_1=\underline{\underline{741641{,}8\,s}}$

c) <u>Gegeben</u> $T_2=162000\,s$. Gegeben ist ist somit auch der Faktor für T: $\underline{fT=T_2/T_1=32{,}085}$

Der Faktor für r beträgt $fr=\sqrt[3]{fT^2}=10{,}097$. Also $r_2=10{,}097\cdot r_1=\underline{\underline{64218{,}1\cdot 10^6\,m}}$.

Der Faktor für v beträgt $fv=\sqrt[3]{1/fT}=0{,}3147$. Also $v_2=0{,}3147\cdot v_1=\underline{\underline{2490{,}7\,m/s}}$.

6) Sichtbar: $M_s=8\cdot 10^{41}\,kg$, $R_G=6\cdot 10^{20}\,m$: $v=\sqrt{\dfrac{M_s\cdot\gamma}{R_G}}=2{,}983\cdot 10^5\,m/s$

Dunkel: $v\approx 10^6\,m/s$; $R_G=6\cdot 10^{20}\,m$: $M_{Ges}=\dfrac{R_G\cdot v^2}{\gamma}=8{,}99\cdot 10^{42}\,kg$.

Verhältnis: $\dfrac{M_s}{M_{Ges}}\approx 0{,}1$.

Mit nichts anderem, als mit „Newtons Apfelbaum" und „Cavendishs Pferdehaar" stellen wir fest, dass lediglich 10% der Masse unsere Milchstraße aus sichtbarer bzw. nachweisbarer Materie besteht. 90% sind eine bisher unbekannte „Dunkle Materie".
Cavendish hat bereits mit seinem Pferdehaar „in das Erdinnere hinein geschaut" und dort schwere Elemente wie z.B. Eisen entdeckt. Nun schauen wir mit dem gleichen gedanklichen Instrumentarium in die fernsten Weiten des Kosmos und entdecken dort wieder etwas bis heute Mysteriöses.