C) Bewegung von Körpern im Gravitationsfeld

1) Wie kommt die Kreisbewegung zustande?

a) Wiederholung

Abb1 Wird der Apfel mit der Geschw. v seitlich abgerissen, so fliegt er längs einer Parabel zu Boden. Der Radius des Krümmungskreises der Wurfparabel ist $r = v^2 / g$

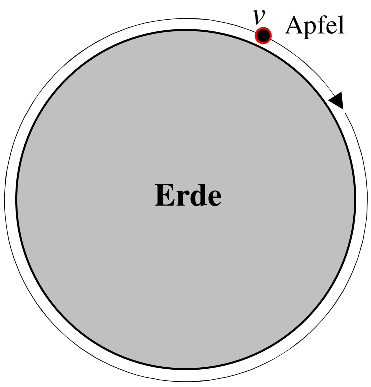


Abb2 Ist v so groß, dass der Krümmungskreisradius mit dem Erdradius übereinstimmt, dass also $v = \sqrt{R_E \cdot g}$ gilt, dann schlägt der Apfel nie mehr auf.

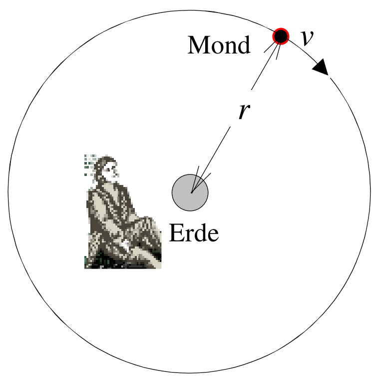


Abb3 Damit der Mond die Erde im Abstand r vom Erdmittelpunkt mit dem richtigen Tempo umläuft, muss der Ortsfaktor g durch das verkleinerte G ersetzt werden: $v = \sqrt{r \cdot G}$

b) Die Kreisbewegung

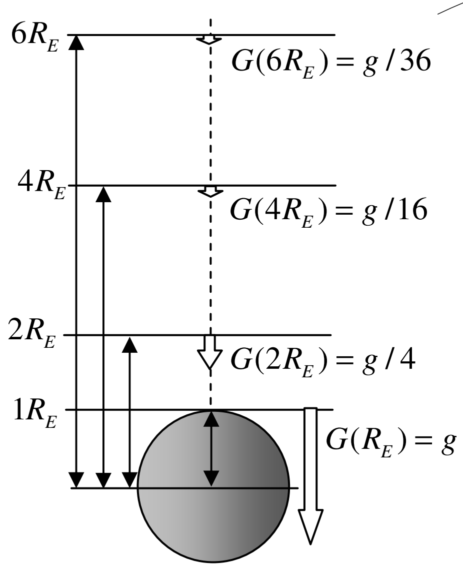


Abb 4 Fallbewegung
Von größerer Höhe startet der fallende Stein mit einem verminderten g-Wert.

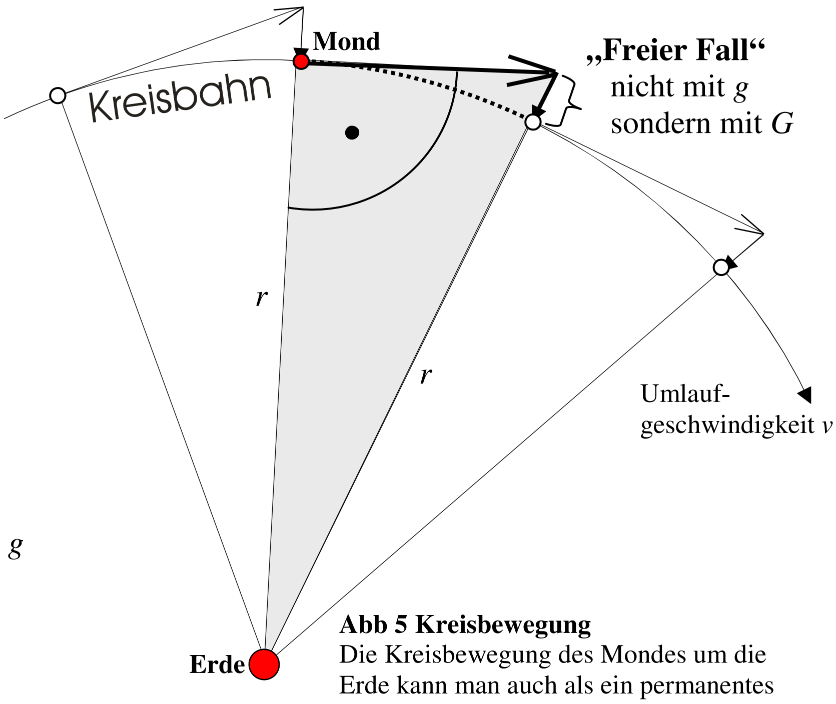


Abb 5 Kreisbewegung
Die Kreisbewegung des Mondes um die Erde kann man auch als ein permanentes „Fallen“ interpretieren. Doch die Fallbewegung verfehlt stets ihr Ziel.

Fallbewegung: Auf dem Erdboden herrscht die Gravitationsfeldstärke $G(R_E) = g$.
Der *Ortsfaktor* $g = 9{,}81\,m/s^2$, die *Fallbeschleunigung* g am Erdboden und die *Gravitationsfeldstärke* g dort sind also unterschiedliche Bezeichnungen für *dasselbe*.

Entfernt man sich von der Erde, so nimmt die Gravitationsfeldstärke quadratisch mit der Entfernung vom Erdmittelpunkt ab. Beim doppeltem Erdradius wird ein losgelassener Stein nur noch mit $G(2R_E) = g/4 \approx 2{,}5\,m/s^2$ in Richtung Erde beschleunigt, bei vierfacher Erdradienentfernung ist die Fallbeschleunigung nur noch $G(4R_E) = g/16 \approx 0{,}625\,m/s^2$ …

Also: Im Abstand $r = R_E$ vom Erdmittelpunkt hat die Fallbeschleunigung den Wert g. Im beliebigen Abstand $r > R_E$ vom Erdmittelpunkt ist g durch G zu ersetzen.

2) Herleitung der Formel für die Zentripetalkraft

Kreisbewegung: Wie kommt sie zustande?
Nach dem Trägheitsgesetz möchte jeder Körper *gleichförmig gradlinig* weiterfliegen.
Das würde auch der Mond auf seiner Kreisbahn gerne tun.
Stellen wir uns vor, wir könnten die Anziehungskraft der Erde für einen Moment abschalten. Dann würde der Mond tatsächlich mit seiner Geschwindigkeit v tangential geradeaus weiterfliegen. Schalten wir die Schwerkraft der Erde nun wieder gedanklich an, so ist der Mond zu weit von der Erde entfernt und muss wieder zur Erde zurückgezogen werden, denn in Wirklichkeit lässt sich die Anziehungskraft ja nicht abschalten.
So wie die Erde den Stein durch den freien Fall zu sich zieht, so zieht sie jetzt auch den „falsch geflogenen" Mond durch freien Fall zu sich. Auf Mondhöhe gilt aber nicht die Fallbeschleunigung g, sondern es gilt G. (Wir hatten schon gelernt: G nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab, es gilt $G = \gamma M / r^2$. Die Grav.-konstante γ stammte von Cavendish).
Allgemein nennt man diejenige Beschleunigung, die auf das Kreis*zentrum* gerichtet ist und somit die *Kreisbewegung* erzwingt *Zentripetalbeschleunigung*. Buchstabe a_Z, (a für Beschleunigung, Z für „Zum Zentrum hin"). (Siehe Abb. 5)
Erkenntnis: Für die Kreisbahn des Mondes hat a_Z denjenigen Wert G, den auch der von Mondhöhe auf die Erde zufallende Stein hätte. Also gilt $a_Z = G$ bzw. $G = a_Z$.
In Abbildungen 3) wurde noch einmal den Zusammenhang $v = \sqrt{r \cdot G}$ wiederholt.
Weil aber $a_Z = G$ bzw. $G = a_Z$ ist, setzen wir das ein und erhalten $v = \sqrt{r \cdot a_Z}$.
Umstellen liefert die gesuchte Formel für die *Zentripetalbeschleunigung* $\boxed{a_Z = \frac{v^2}{r}}$.
Um diese Beschleunigung zu bewirken, bedarf es einer Kraft, denn nach dem 2. Newtonschen Gesetz $F = m \cdot a$ gehört zu jeder Beschleunigung eine Kraft. Die Kraft heißt jetzt *Zentripetalkraft*. Also in $F = m \cdot a$ für $F = F_Z$ und für $a = a_Z$ setzen ergibt $F_Z = m \cdot a_Z$.
Jetzt noch für a_Z den oben abgeleiteten Ausdruck v^2 / r einsetzen.
Also: Die Formel für die Zentripetalkraft lautet $\boxed{F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r}}$, m = Masse des rot. Körpers.

a) Zusammenfassung: Kreisbewegung

Bei der Bewegung des Mondes um die Erde fungiert die Erdanziehungskraft $F = m \cdot G$ als Zentripetalkraft F_Z, denn diese zieht den Mond ja permanent in Richtung Erdmittelpunkt und bewirkt so, durch das permante „Zufallen" die Kreisbewegung.
Weil also $F = m \cdot G$ als $F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r}$ fungiert, haben wir die Gleichung $m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot G$.
Durch Kürzen und Umstellen sieht man aber sofort, dass wir diese Gleichung längst kennen:

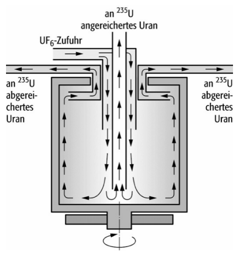
$$\cancel{m} \cdot \frac{v^2}{r} = \cancel{m} \cdot G \quad \Big| \cdot r \quad \text{ergibt} \quad v^2 = r \cdot G \ \Big| \sqrt{\ldots} \quad \text{, also } \boxed{v = \sqrt{r \cdot G}}.$$

Diese Gleichung erschien in verschiedenen Formen:
a) Die Form $r = v^2 / g$ hatte Newton für den Krümmungskreis der Wurfparabel gefunden.
b) Die Form $v = \sqrt{R_E \cdot g}$ hatte er dann für den „rasenden Apfel" (1. kosm. Geschw.)
c) Die Form $v = \sqrt{r \cdot G}$ ergab sich dann durch Ersetzen von g durch G für den Mond.
d) Die Form $v = \sqrt{r \cdot a_Z}$ liefert die allgemeine Formel für die *Zentripetalbeschleunigung*

Aufgaben

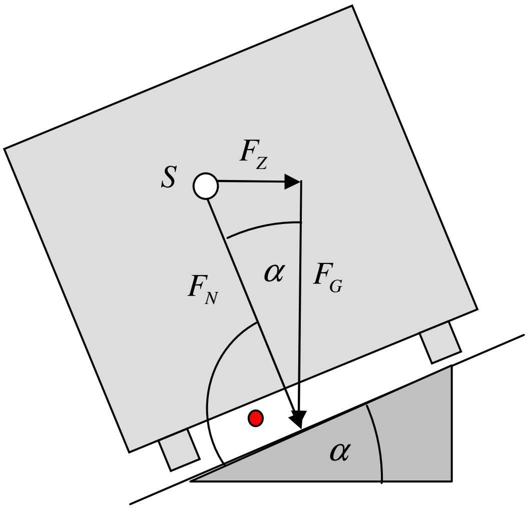
1) Wiederhole mit eigenen Worten die Hauptgedanken zur Herleitung der Formel für die Zentripetalbeschleunigung $a_Z = v^2 / r$

2) Eine Gaszentrifuge zur Urannreicherung hat einen Durchmesser von 12 *cm*. Sie dreht sich mit 60 000 Umdrehungen pro Minute. Berechne, um wieviel mal die Zentripetalbeschleunigung größer als der Ortsfaktor g ist.



3) In einer rotierenden Raumstation wird im Außenring für die Astronauten die Schwerkraft der Erde simuliert.
Die Station hat einen Durchmesser von 100 m . Wie schnell muss sie sich drehen um den g - Wert zu erreichen?

4) Autobahnen und Bahngleise müssen für die Kurvenfahrt überhöht sein, damit die Räder trotz der Fliehkraft
$F_Z = m \cdot v^2 / r$ rechtwinklig aufliegen.
Berechne den erforderlichen Überhöhungswinkel α um eine Kurve mit Radius $r = 400m$ sicher mit der Geschwindigkeit $v = 20\,m/s$ durchfahren zu können.
Der Punkt S ist der Schwerpunkt des Fahrzeuges.



5) Für den ProblemBER müssen Flugzeug künftig in 600 Meter Höhe bei einer Geschwindigkeit von 594 *km/h* enge Kurven vom Radius $r = 1200\,m$ über Kleinmachnow ausfliegen.
Berechne den erforderlichen Neigungswinkel des Flugzeuges.

Lösung

2) Der Umfang beträgt $U = d \cdot \pi = 0{,}377m$. Dieser wird bei 60 000 Umdr / min 60 000 mal in einer Minute durchlaufen. Also: $Weg = 60\,000 \cdot U = 22\,619{,}5m$; $Zeit = 60s$.

Geschwindigkeit $v = \dfrac{Weg}{Zeit} = \dfrac{22\,619{,}5m}{60s} = 377\,m/s$.

Bei dieser Geschwindigkeit beträgt die Zentripetalbeschleunigung

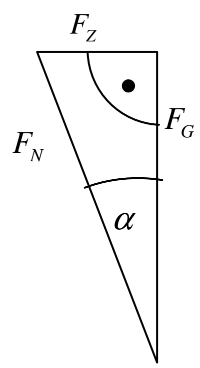
$a_Z = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{(377m/s)^2}{0{,}06m} = 2{,}369 \cdot 10^6 m/s^2$. Das ist etwa 240 000 mal größer als g.

3) Der Umfang beträgt $U = \pi \cdot d = 314{,}16m$.

Weil $\dfrac{v^2}{r} = a_Z$ den Wert g annehmen soll, gilt $v = \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{9{,}81m/s \cdot 50m} = 22{,}147\,m/s$

Aus $v = \dfrac{Weg}{Zeit} = \dfrac{U}{T}$ folgt $T = \dfrac{U}{v} = \dfrac{314{,}16m}{22{,}147\,m/s} = \underline{\underline{14{,}185\,s}}$

4) Das Dreieck im überhöhten Bahndamm und das Kräftedreieck sind ähnlich im mathematischen Sinne. Deshalb überträgt sich der Überhöhungswinkel α vom Bahndamm auf das Kräftedreieck.



Kräftedreieck

Ankathete: $F_G = m \cdot g$ = Schwerkraft des Fahrzeuges

Hypothenuse: F_N = Normalenkraft, die normal = senkrecht auf dem überhöhen Bahndamm steht.

Gegenkathete: $F_Z = m \cdot v^2 / r$ = Zentripetalkraft.

Da man für F_G und F_Z Werte hat, für F_N aber nicht, sind AK und GK bekannt. Die Winkelfunktion mit AK und GK ist aber der Tangens.

Also gilt $\tan\alpha = \dfrac{GK}{AK} = \dfrac{F_Z}{F_G} = \dfrac{m \cdot v^2}{r \cdot m \cdot g} = \dfrac{v^2}{r \cdot g} = 0{,}102$.

Daraus folgt $\underline{\underline{\alpha = 5{,}8°}}$

5) Hier gilt die gleiche Formel wie bei Aufg 4)

$\tan\alpha = \dfrac{F_Z}{F_G} = \dfrac{v^2}{r \cdot g} = \dfrac{(165m/s)^2}{1200m \cdot 9{,}81m/s^2} = 2{,}313$.

Daraus folgt $\underline{\underline{\alpha = 66{,}12°}}$.

Mit geschlossenen Augen merkt der Fluggast davon nichts,
doch wenn er rausguckt, - ich weiß nicht …