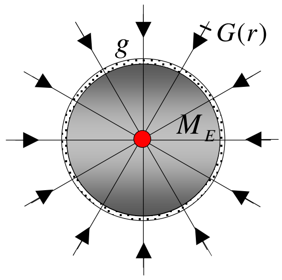
4) Experimentelle Bestimmung der **Gravitationskonstante** γ .



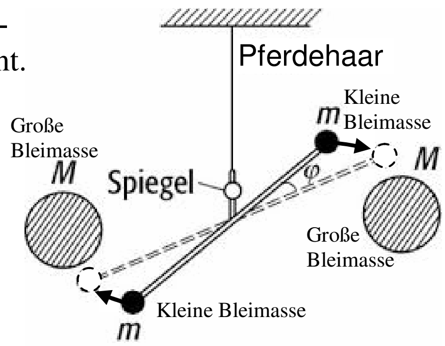
Newtons Überlegungen ergab, dass für die Gravitationsfeldstärke der Erde die Formel $G(r) = g \cdot R_E^2 \cdot \frac{1}{r^2}$ gilt. Der Term $\frac{1}{r^2}$ zeigt, dass die Feldstärke mit dem Quadrat der Entfernung vom Ermittelpunkt abnimmt. Es wurde argumentiert, dass der Term $g \cdot r_E^2$ proportional zur felderzeugenden Masse M_E sein muss, also $g \cdot R_E^2 \sim M_E$. Mit einer zu bestimmenden *Gravitationskonstante* γ muss also also $g \cdot R_E^2 = \gamma \cdot M_E$ gelten.

Wie lässt sich der Wert von γ ermitteln? Umstellen ergibt $\gamma = g \cdot R_E^2 / M_E$.

Bis ins 19. Jahrhundert hinein gab es zwei widerstreitende Ansichten über den Aufbau des Planeten Erde. Die eine Theorie, der *Neptunismus*, ging davon aus, dass sich alle Gesteine der Erde als Sedimente aus dem Wasser abgeschieden hätten. Die andere Theorie, der *Plutonismus*, besagte, dass die Gesteine der Erde aus einem „Zentralfeuer" im Erdinneren hervorgegangen seien und dass sie bei der Abkühlungan der Erdoberfläche, wie die Schale eines ausgetrockneten Apfels, schrumpfen. Dadurch seien die Gebirge entstanden. Trotz der großen Kontroverse war beiden Theorien doch gemein, dass das Oberflächengestein, wie auch immer es erdgeschichtlich entstanden ist, doch qualitativ mit dem „Gestein" des Erdinneren übereinstimmt.
Bereits Newton neigte daher zu der Ansicht, dass die Gesteinsdichte $\rho \approx 3000\, kg/m^3$, welche man an der Erdoberfläche vorfindet, für den gesamten Planeten gelten sollte.

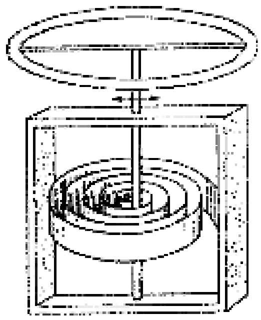
Mit $M_E = \rho \cdot V_E = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_E^3$ ergibt sich dann für die Gravitationskonstante die Formel

$$\gamma = \frac{g \cdot R_E^2}{M_E} = \frac{g \cdot R_E^2 \cdot 3}{\rho \cdot 4\pi \cdot R_E^3} = \frac{3 \cdot g}{4 \cdot \rho \cdot \pi \cdot R_E} = \frac{3 \cdot 9{,}81 m/s^2}{4 \cdot 3000 kg/m^3 \cdot \pi \cdot 6378000 m} \approx 1{,}22 \cdot 10^{-10} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} .$$

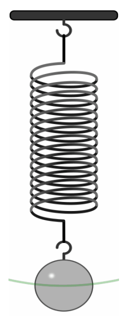


Dieser Wert ist *unbefriedigend*, denn die Beschaffenheit des Erdinneren war ja unbekannt. Es gelang dem Engländer *Cavendish* 1797 mit dem ersten *Präzisionsexperiment* der Physikgeschichte, den winzigen Wert von γ zu ermitteln. *Cavendish* war eine interessante Persönlichkeit, dessen Lebensgeschichte lesenswert ist.
Cavendish konstruierte eine sog. *Drehwaage*, bei welcher eine Hantel mit zwei *Bleikugeln* an einem dünnen **Pferdehaar** hing.

In einem Vorversuch wurde zunächst der sog. *Torsionsmodul* des Pferdehaares ermittelt, welcher ein Maß für die Rückstellkraft bei Verdrillung ist. So wie sich die *Federkonstante* D einer Schraubenfeder aus der Schwingungsfrequenz f einer angehängten Masse m gemäß $2\pi f = \sqrt{D/m}$ ergibt, so lässt sich entsprechend der Torsionsmodul aus der Drehschwingungsfrequenz ermitteln. Bei bekanntem Torsionsmodul lässt sich dann jedem Verdrillungswinkel ein Wert der Rückstellkraft zuordnen.



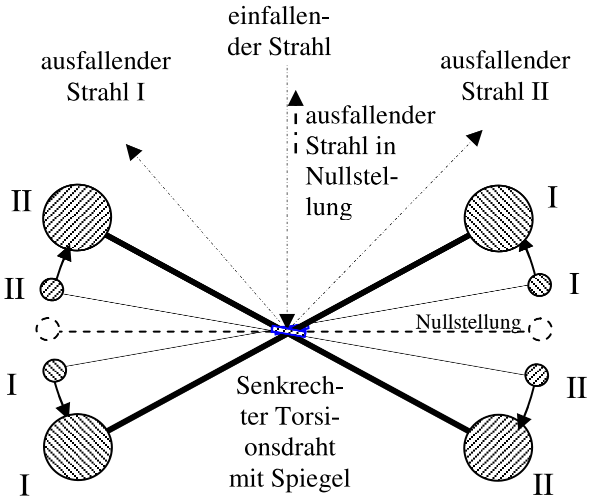
Messung des Torsionsmoduls einer Spiralfeder durch Frequenzmessung einer Drehschwingung



Messung der Federkonst der Schraubenfeder durch Frequenzmessung

Hauptversuch (moderne Version)
Eine waagerecht stehende Hantel mit zwei großen Bleimassen lässt sich um den Mittelpunkt in den Stellungen I und II arretieren. Eine weitere Hantel mit zwei kleineren Bleimassen ist an dem Torsionsdraht beweglich aufgehängt. Je nach Stellung der

großen Kugeln verdrillt sich der Draht der kleinen Kugeln in die eine oder andere Richtung zu den großen Kugeln hin, denn die feststehenden großen Kugeln ziehen die beweglichen kleinen Kugeln per Gravitation in ihre Richtung.



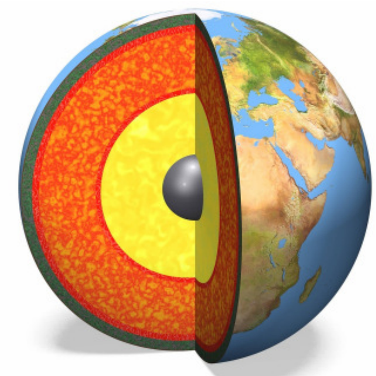
Vor Cavendish konnte sich niemand vorstellen, dass eine lediglich kiloschwere Bleikugel eine kleine z.B. $100g$-Bleikugel mit einer relevaten Kraft anziehen könnte. Schließlich lässt sich die Gravitation der gesamten Erde auf die $100g$-Kugel mit der bloßen Hand kompensieren.
Über einen auf den Draht geklebten Spiegel konnte die Verdrillung per Lichtstrahl extrem vergrößert angezeigt werden.
Durch den Vorversuch wußte man, welche Rückstellkraft zu welchem Winkel gehört. So konnte Cavendish aus dem Winkel die Rückstellkraft und somit den Wert der Gravitationskonstanten γ hochpräzise ermitteln:

Damit ist das Newtonsche Kraftgesetz fertig:

$$\boxed{F(r) = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad \text{mit} \qquad \gamma = 6,673 \cdot 10^{-11}\ m^3 / kg \cdot s^2}$$

Mit diesem genauen Wert ergab sich nun im Umkehrschluss aus der Formel $g \cdot R_E^2 = \gamma \cdot M_E$ die Möglichkeit die Erdmasse zu ermitteln: $M_E = \frac{g \cdot R_E^2}{\gamma} = 5,98 \cdot 10^{24} kg$. Auf indirekte Weise hatte Cavendish „*die Erde im Labor gewogen*."

Mehrnoch: Da das Oberflächenmaterial tatsächlich bis zu einer enormen Tiefe aus „leichtem" Gestein (SiAl) mit der Dichte besteht $\rho \approx 3000\, kg / m^3$ besteht, würde die Erdmasse bei dieser Dichte nur



$$M_E = \rho \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot R_E^3}{3} =$$

$$= \frac{4 \cdot 3000\, kg / m^3 \cdot \pi \cdot (6378000m)^3}{3} = 3,26 \cdot 10^{24} kg$$

betragen. Cavendish hat also nicht nur „die Erde im Labor gewogen", sondern er hat auch noch tief in das Erdinnere „hineingeschaut" und „gesehen", dass sich im Erdkern Marerial mit großer Dichte befinden muss. Heute wissen wir, dass sich dort überwiegend Eisen mit der Dichte $\rho = 7,9\, t / m^3$ und Nickel mit $\rho = 8,9\, t / m^3$ befindet.

Aufgaben

1) Recherchiere den Neptunismus und Plutonismus.
2) Recherchiere das Leben von Cavendish.
3) Berechne den (falschen) γ-Wert, für eine Erde aus Material der Dichte $\rho = 2000\,kg/m^3$.
4) Eine Schraubenfeder mit der Federkonstanten D führt bei einer angrehängten Masse m Schwingungen mit der Frequenz $f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$. Diese Formel ermöglicht es mit einem Schwingversuch eine unbekannte Federkonstante zu ermitteln.
   Geg.: $m = 100\,g$; $f = 4\,Hz$. Ges.: Federkonstante D in der Maßeinheit $\underline{N}ewton/\underline{m}eter$
5) Beim Cavendish Versuch haben die kleinen Bleikugeln die Masse von $m = 0{,}1\,kg$ und die großen die Masse $M = 2\,kg$. Wie groß ist die Anziehungskraft, wenn die Kugelmitten den Abstand $r = 6\,cm$ haben? Gib das Ergebnis in nN (nanoNewton) an.
6) Die Erdmasse beträgt $M_E = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,kg$. Für den Mond gilt $M_M = 7{,}35 \cdot 10^{22}\,kg$.
   Die Mondbahn ist leicht elliptisch, der Abstand Erde-Mond schwankt daher zwischen $R_{min} = 3{,}633 \cdot 10^8\,m$ und $R_{max} = 4{,}055 \cdot 10^8\,m$. Berechne die Anziehungskräfte für diese beiden Abstände und gib die Ergebniss mit der geeigneten Vorsilbe Mega, Giga, Tera, Peta, Exa, .. an.
7) An welcher Stelle zwischen Erde und Mond heben sich die Gravitationsfeldstärken auf?
   $M_E = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,kg$; $M_M = 7{,}35 \cdot 10^{22}\,kg$; $R_{EM} = 3{,}8 \cdot 10^8\,m$
8) Wie hat Cavendish die Erde „im Labor gewogen“?
9) <u>Referat</u>: Aufbau der Erde.

Lösungen

3) $\gamma = \dfrac{g \cdot R_E^2}{M_E} = \dfrac{g \cdot R_E^2}{\rho \cdot (4/3)\pi \cdot R_E^3} = \dfrac{3 \cdot g}{4 \cdot \rho \cdot \pi \cdot R_E} = \dfrac{3 \cdot 9{,}81 m/s^2}{4 \cdot 2000 kg/m^3 \cdot \pi \cdot 6378000 m} \approx 1{,}836 \cdot 10^{-10} \dfrac{m^3}{kg \cdot s^2}$

4) Es gilt $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{D}{m}} \quad \Big| \; (\ldots)^2$. Daraus folgt $f^2 = \dfrac{1}{4\pi^2} \cdot \dfrac{D}{m} \quad \Big| \cdot 4\pi^2 m$ und somit

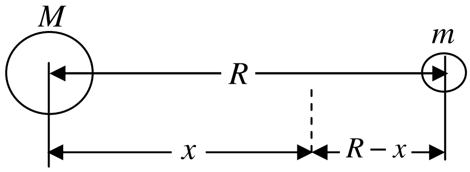
$$D = 4\pi^2 f^2 m = 4\pi^2 \cdot \left(4 \sec^{-1}\right)^2 \cdot 0{,}1 kg = 63{,}165 \frac{kg}{s^2} = 63{,}165 \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m} = 63{,}165 \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m} = \underline{\underline{63{,}165 \frac{N}{m}}}$$

5) $F(r) = \gamma \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6{,}673 \cdot 10^{-11} \dfrac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \dfrac{0{,}1 kg \cdot 2 kg}{(0{,}06 m)^2} = 3{,}7 \cdot 10^{-9} \dfrac{m^3 \cdot kg^2}{kg \cdot s^2 \cdot m^2} = 3{,}7 \cdot 10^{-9} \dfrac{m \cdot kg}{s^2} = \underline{\underline{3{,}7\, nN}}$

6) $F(r) = \gamma \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{R_{\min}^2} = \gamma \cdot \dfrac{5{,}98 \cdot 10^{24} kg \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22} kg}{\left(3{,}633 \cdot 10^8 m\right)^2} = 222{,}2 \cdot 10^{18} N = \underline{\underline{222{,}2\, EN}}$

$$F(r) = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R_{\max}^2} = \gamma \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} kg \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22} kg}{\left(4{,}055 \cdot 10^8 m\right)^2} = 178{,}4 \cdot 10^{18} N = \underline{\underline{178{,}4\, EN}}$$

7)



Der Abstand zwischen dem Erdmittelpunkt und Mondmittelpunkt sei $R_{EM} = 3{,}8 \cdot 10^8 m$.
Die Entfernung des gesuchten Punktes vom Erdmittelpunkt wird mit x angesetzt.
Dann ist die Entfernung des gesuchten Punktes vom Mondmittelpunkt $R_{EM} - x$.

Die Gravitationsfeldstärke der Erde am gesuchten Punkt ist $\gamma \cdot \dfrac{M_E}{x^2}$.

Die Gravitationsfeldstärke des Mondes am gesuchten Punkt ist $\gamma \cdot \dfrac{M_M}{(R_{EM} - x)^2}$.

Die Feldstärken sind entgegen gerichtet, ihre Beträge müssen am gesuchten Punkt gleich sein:

Forderung $\cancel{\gamma} \cdot \dfrac{M_E}{x^2} = \cancel{\gamma} \cdot \dfrac{M_M}{(R_{EM} - x)^2}$. Kehrwert: $\dfrac{x^2}{M_E} = \dfrac{(R_{EM} - x)^2}{M_M} \quad \Big| \cdot M_E \cdot M_M$

ergibt $M_M \cdot x^2 = M_E \cdot (R_{EM} - x)^2 \quad \Big| \sqrt{\ldots}$. ergibt $\sqrt{M_M} \cdot x = \sqrt{M_E} \cdot (R_{EM} - x)$

Ausmultiplizieren, zusammenfassen: $\sqrt{M_M} \cdot x = \sqrt{M_E} \cdot R_{EM} - \sqrt{M_E} \cdot x$

$$\left(\sqrt{M_M} + \sqrt{M_E}\right) \cdot x = \sqrt{M_E} \cdot R_{EM} \quad | :\left(\sqrt{M_M} + \sqrt{M_E}\right)$$

Ergebnis: $x = \dfrac{\sqrt{M_E} \cdot R_{EM}}{\sqrt{M_M} + \sqrt{M_E}} = \dfrac{\sqrt{5{,}98 \cdot 10^{24} kg} \cdot 3{,}8 \cdot 10^8 m}{\sqrt{7{,}35 \cdot 10^{22} kg} + \sqrt{5{,}98 \cdot 10^{24} kg}} = \underline{\underline{3{,}421 \cdot 10^8 m}}$