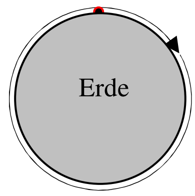
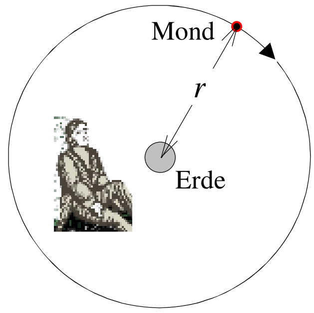
4) <u>Newtons **dritter** Traum und das Gravitationsgesetz.</u>



Newton hatte sich den „rasenden Apfel“ nur ausgedacht. Wie sollte er seine Gedanken überprüfen. Kanonenkugeln erreichten damals nicht einmal die Schallgeschwindigkeit $340\,m/s$ und selbst die Schallgeschwindigkeit wäre 23mal zu klein. Mit Kanonen lässt sich kein „Apfel“ in die Umlaufbahn schießen. Wie konnte er seine Gedanken prüfen?
Der Lösung kam ihm in seinem *dritten* unruhigen Traum. Der Mond schimmerte durch sein Fenster. Der Mond kann die Antwort geben, denn der Mond umkreist die Erde wie sein „Apfel“.
Jetzt ging alles schnell: Man wusste damals schon, dass der Radius r der Mondumlaufbahn das 60fache des Erdradius ist.



Also: $r = 60 \cdot 6400 km = 384\,000\,000\,m$. Mit $v = \sqrt{r \cdot g} =$
$= \sqrt{384\,000\,000 \cdot 10}$ ergab sich $v \approx 62\,000\,m/s$. Der Umlaufweg ist jetzt natürlich länger: $s = 2\pi \cdot 384\,000\,000\,m \approx 2\,500\,000\,000\,m$.
Damit wäre die Umlaufzeit $T = 2\,500\,000\,000 / 62\,000 \approx 40\,000\,s$.

Das sind aber nur 0,463 Tage. Newton schreckte auf: Der wirkliche Mond ist sehr viel langsamer, der braucht 28 Tage für den Umlauf und sein „Mond“ brauchte nicht einmal einen halben Tag. Gibt man nun auf oder grübelt man weiter? Newton wäre nicht Newton, wenn er nicht das Zweite täte. Um wieviel war denn sein Mond zu schnell? Er war $28/0{,}463 \approx 60$ mal zu schnell. Wie könnte er seinen „Mond“ um den Faktor 60 verlangsamen?
Die Zahl 60 war sehr verdächtig: Hatte doch der Mond einen 60mal größeren Abstand vom Erdmittelpunkt, wie der Apfelbaum. Der Apfelbaum steht schließlich nicht im Erdmittelpunkt, sondern auf der Erdoberfläche. Er steht also *einen* Erdradius vom Erdmittelpunkt entfernt, während sich der Mond in einem Abstand von *sechzig* Erdradien vom Erdmittelpunkt entfernt befindet. In der Zahl 60 liegt des Rätsels Lösung: Die Formel $v = \sqrt{r \cdot g}$ muss so umgebaut werden, dass nur noch 1/60 des bisherigen Wertes heraus kommt.
Der Bahnradius $r = 60 \cdot 6\,400\,000\,m$ steht fest, an ihm lässt sich nicht rütteln.
Also muss g abgeändert werden. Der Ortsfaktor g steht aber unter der Wurzel.
Um v auf 1/60 zu reduzieren, muss g demnach um das 1/3600 kleiner werden, denn die Wurzel aus 1/3600 ist 1/60. Die Anziehungskraft der Erde ist also nicht konstant, sie nimmt mit der Entfernung ab. In der Entfernung von *einem* Erdradius vom Mittelpunkt entfernt, also auf der Erdoberfläche, wirkt sie mit $g \approx 10\,m/s^2$. In der Entfernung von *sechzig* Erdradien von Mittelpunkt entfernt, also im Bereich des Mondes, wirkt sie mit $G = g/3600$. G heißt auch *Gravitationsfeldstärke*. Damit hatte Newton das Entfernungsgesetz der Gravitation gefunden:

Im <u>beliebigen</u> Abstand $r \geq R_E$ vom Erdmittelpunkt ist g durch $G(r) = g \cdot (R_E / r)^2$ zu ersetzen.
Dabei ist R_E der Erdradius und $g \approx 10\,m/s^2$.

<u>Probe</u>: Feldstärke der Erde auf der <u>Erdoberfläche</u>: $r = R_E$ ergibt $G(R_E) = g \cdot \left(\frac{\cancel{R_E}}{\cancel{R_E}}\right)^2 = g$ ✓

Feldstärke der Erde im <u>Bereich des Mondes</u>: $G(R_{EM}) = g \cdot \left(\frac{\cancel{R_E}}{60 \cdot \cancel{R_E}}\right)^2 = \frac{g}{3600}$ ✓

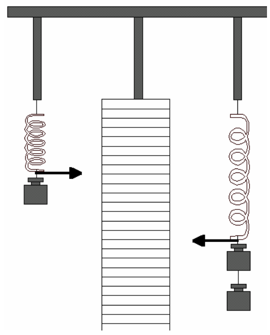
Also: Der **Ortsfaktor** $\boxed{g}$ auf der Erdoberfläche ist für bel. Entfernung durch $\boxed{G}$ zu ersetzen.

5) <u>Newtons **Vervollständigung** des Gravitationsgesetzes und die Gravitationskonstante.</u>

Umschreiben der Formel $G(r) = g \cdot \left(\frac{R_E}{r}\right)^2$ ergibt $G(r) = g \cdot R_E^2 \cdot \frac{1}{r^2}$.

Die Feldstärke $G(r)$ in beliebigem Abstand $r \geq R_E$ vom Erdmittelpunkt ist also proportional zum reziproken Abstandsquadrat $1/r^2$ und $(g \cdot R_E^2)$ ist die Proportionalitätskonstante.
In der Entfernung $r = 2 \cdot 6\,400 km = 12\,800 km$ gilt $G(2 \cdot R_E) = g/4 \approx 2{,}5\, m/s^2$.
In der Entfernung $r = 3 \cdot 6\,400 km = 19\,200 km$ gilt $G(3 \cdot R_E) = g/9 \approx 1{,}1\, m/s^2$.

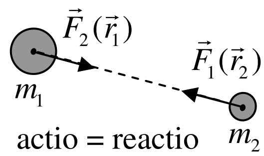
Die Proportionalitätskonstante lautet $(g \cdot R_E^2)$. Worauf beruht diese Größe?
Es liegt nahe, dass ein Planet mit größerer Masse M eine größere Gravitation bewirkt. Also müsste $(g \cdot R_E^2) \sim M$ gelten.



Wie konnte Newton das beweisen? Schließlich konnte er die Erde nicht einfach verdoppeln. Doch fand er einen Umweg, er besteht aus vier Gedankenschritten:

a) Für eine schwerere Masse braucht man mehr Kraft zum Halten. Newton hat das mit seiner elastischen Spiralfeder (Newtonmeter) genau nachgemessen. Ein doppelt großes Eisenstück wird also doppelt so stark von der Erde angezogen.

b) Nun hatte Newton auch des Gesetz **actio = reactio** entdeckt: Kräfte treten stets **paarweise** auf. Und: Kraft und Gegenkraft sind dem Betrage nach *gleich* groß. Also zieht nicht nur die Erde das doppelt so große Eisenstück doppelt so stark an, sondern das doppelt so große Eisenstück zieht auch die Erde doppelt so stark an.



Schlussfolgerung: Anziehungskraft und Masse sind beim Eisenstück proportional zueinander.

c) Übertragung: Was für das Eisenstück gilt, gilt auch für die Erde: Die Gravitation ist proportional zur Masse, also $G(r) \sim M_E$. Die Masse M ist die alleinige Ursache der Gravitation

d) Also muss $(g \cdot R_E^2)$ proportional zur Erdmasse sein. Ansatz: $(g \cdot R_E^2) = \gamma \cdot M_E$
Der Faktor γ heißt *Gravitationskonstante* (wie $\gamma \mathrel{\hat{=}} g \mathrel{\hat{=}}$ Gravitation).
Aus $G(r) = g \cdot (R_E / r)^2 = (g \cdot R_E^2)/r^2$ wird jetzt $G(r) = \gamma \cdot M_E / r^2$.
Überträgt man dieses Gesetz auf bel. Massen, so folgt

$$\boxed{G(r) = \gamma \cdot \frac{M}{r^2} \quad \text{Gravitationsfeldstärke nach Newton}}$$

6) Das Newtonsche Kraftgesetz.

Auf der Erdoberfläche mit $r = R_E$ gilt $G(R_E) = \gamma \cdot \frac{M}{R_E^2} = (\gamma \cdot M) \cdot \frac{1}{R_E^2} = \left(g \cdot \cancel{R_E^2}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{R_E^2}} = g$.

Ein Körper erfährt hier im Klassenzimmer die Schwerkraft $F = g \cdot m$. Z.B. wird eine hundert Gramm Tafel Schokolade mit $F = g \cdot m \approx 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}1 kg = 1 \underline{N}ewton$ von der Erde angezogen.

Nun ist aber g ein *Spezialwert* von G, den G auf der Erdoberfläche annimmt. Sind wir nicht auf der Erdoberfläche, so müssen wir g durch G ersetzen und erhalten für die Anziehungskraft anstatt $F = g \cdot m$ den Ausdruck $F = G \cdot m$. Einsetzen der Feldstärkenformel ergibt $F = \gamma \cdot \frac{M}{r^2} \cdot m$

bzw. $$\boxed{F(r) = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{Newtons Kraftgesetz}}\,.$$

Dabei wurde $M = m_1$ und $m = m_2$ genannt.
Dieses Gesetz erfüllt auch Newton Gesetz „actio = reactio" (3. Newtonsche Axiom)

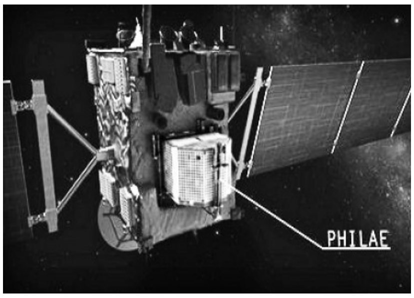
Aufgaben

1) Wiederhole mit eigenen Worten die wesentlichen Inhalte der Newtonschen Gedanken:
   a) Newtons erster Traum unter dem Apfelbaum und der Krümmungskreis der Wurfparabel.
   b) Newtons zweiter Traum und die erste kosmische Geschwindigkeit.
   c) Newtons dritter Traum und das Gravitationsgesetz.
   d) Newtons Vervollständigung des Gravitationsgesetzes und die Gravitationskonstante
   e) Das Newtonsche Kraftgesetz.

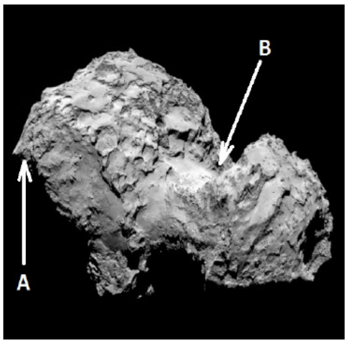
2) Berechne aus $R_E = 6370 km$ und $g = 9{,}81 m/s^2$ die Erdmasse und Erddichte.
   Es gilt $\gamma = 6{,}673 \cdot 10^{-11} m^3 \ / \ kg \cdot s^2$

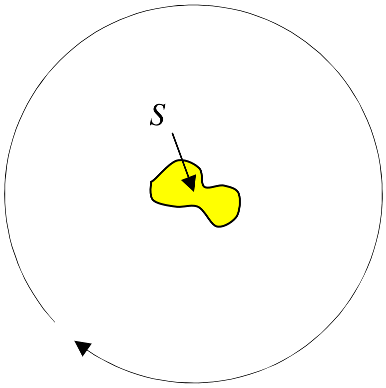
3) In welcher Höhe über der Erdeoberfläche beträgt die Feldstärke 80% des g-Wertes am Boden?

4) Der Lander Philae mit der Masse $m_2 = 100\,kg$ ist der erste und bisher einzige von Menschen gebaute Apparat, der weich auf einem Kometen landete. Die Reise von der Erde bis zum Ziel dauerte mehr als 10 Jahre. Am 2. März 2004 startete die europäische Sonde Rosetta ($m_1 = 3000\,kg$), um den Landeapparat Philae zu dem Kometen 67P/Tschurjumow-Gerassimenko $M = 1{,}0 \cdot 10^{13}\,kg$ zu transportieren. Am 12. November 2014 schwenkte das Tandem in eine Kreisbahn mit $r = 22{,}5\,km$ ein.



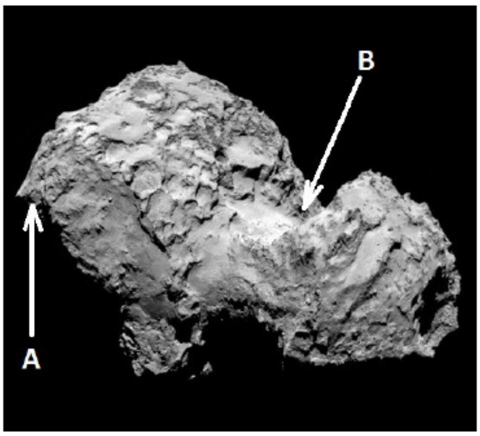
   a) Berechne die Gravitationskraft zwischen dem Kometen und der Sonde Rosetta + Philae am 12. November 2014.

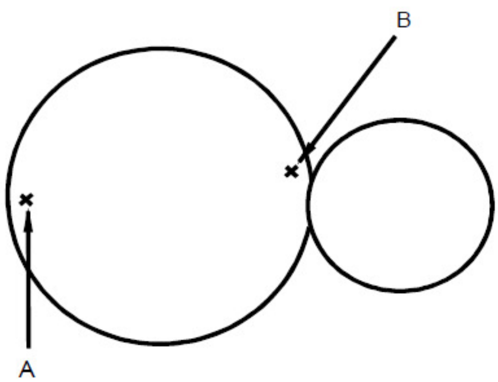




   b) Erläutere Eigenschaften eines *radialen* Gravitationsfeldes.
   Begründe, dass für die Beschreibung des Gravitationsfeldes in der *näheren* Umgebung des Kometen das Modell Radialfeld ungeeignet ist.

   c) Die Gravitation soll an der Landestelle möglichst gering sein. Ist A oder B günstiger?





Lösungen

2) $M_E = \dfrac{g \cdot R_E^2}{\gamma} = \underline{\underline{5{,}981 \cdot 10^{24} kg}}$; $V = 4/3\pi R_E^3 = 1{,}083 \cdot 10^{21} m^3$; $\rho = M_E / V = \underline{\underline{5503 kg/m^3}}$

3) Forderung: $G(R_E + h) = 0{,}8 \cdot g = 0{,}8 \cdot 9{,}81 m/s^2 = 7{,}848 m/s^2$.

Einsetzen in $G(R_E + h) = \gamma \cdot \dfrac{M}{(R_E + h)^2}$ ergibt $\gamma \cdot \dfrac{M}{(R_E + h)^2} = 7{,}848 m/s^2 \;\Big|\; \textit{Kehrwert}$

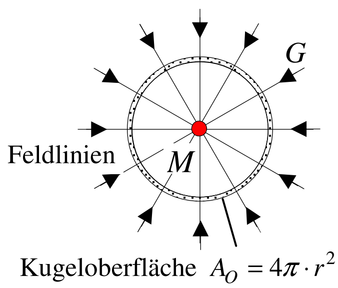
$\Rightarrow \dfrac{(R_E + h)^2}{\gamma \cdot M} = \dfrac{1}{7{,}848 m/s^2} \;\Big|\; \cdot \gamma \cdot M$ bzw. $(R_E + h)^2 = \dfrac{\gamma \cdot M}{7{,}848 m/s^2} \;\Big|\; \sqrt{...} \;\Big|\; - R_E$

ergibt $h = \sqrt{\dfrac{\gamma \cdot M}{7{,}848 m/s^2}} - R_E = \underline{\underline{751{,}877 km}}$

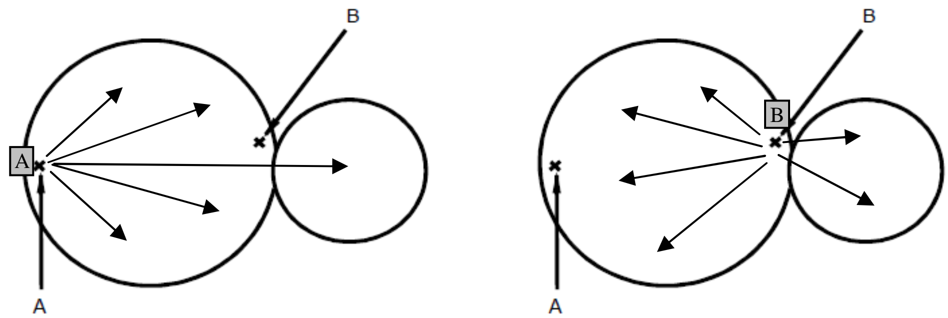
4) a) Der Abstand $22{,}5 km$ ist groß gegenüber der Abmaßen des Kometen.
Also darf das Newtonsche Gravitationsgesetz angewendet werden, welches genau genommen für die Kraft zwischen zwei Punktmassen gültig ist:
Denkt man sich die jeweiligen Massen im jeweiligen Schwerpunkt vereint, so gilt

$$F(r) = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = \gamma \cdot \frac{1{,}0 \cdot 10^{13} kg \cdot (3000 kg + 100 kg)}{(22500 m)^2} = \underline{\underline{4{,}09 \cdot 10^{-3} N}}$$

b) In einem Radialfeld laufen die Feldlinien von einer punkt- oder kugelförmigen Masse gleichmäßig in alle Richtungen. Dabei durchdringen sie immer größer werdende Kugelschalen. Weil die Anzahl der Feldlinien gleichbleibt, die Kugeloberflächen aber quaudratisch größer werden und die Feldstärke gleich der Feldliniendichte ist, nimmt die Feldstärke mit dem Quadrat der Entferung ab. Bei einen unregelmäßigen Körper muss man alle Teilfelder überlagern.



c)



Am Landeplatz A wirken alle Teilkräfte in die gleiche Richtung und verstärken sich so.
Am Landeplatz B wirken die Teilkräfte zum Teil in entgegegesetzte Richtungen und heben sich somit teilweise auf.
Am Landeplatz B ist die Anziehungskraft also geringer. Da der Landeapperat keine Bremsrakete hat, muss der Punkt B gewählt werden, um den Anschlag gering zu halten.