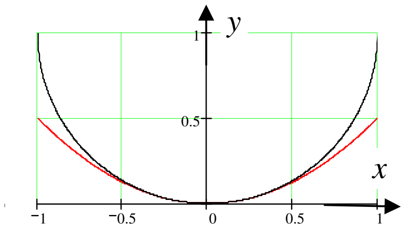
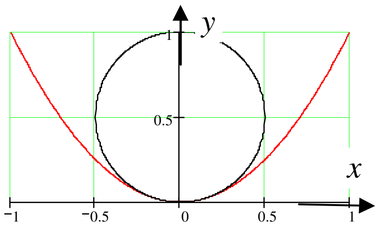
B) Das Gravitationsgesetz

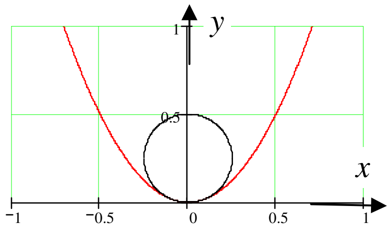
1) Krümmungskreis der Parabel.



Parabel: $y = 0{,}5\,x^2$
Kreis: $r = 1$



Parabel: $y = 1 \cdot x^2$
Kreis: $r = 0{,}5$



Parabel: $y = 2 \cdot x^2$
Kreis: $r = 0{,}25$

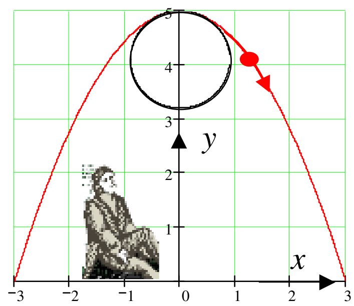
In den *Scheitel* einer Parabel $y = a \cdot x^2$ kann man einen passgenauen Kreis hineinlegen. Dieser Kreis heißt Krümmungskreis. Parabeln mit größerem Koeffizienten *a* sind schlanker. Der Radius *r* des passgenauen Kreises muss daher für größeres *a* kleiner werden, *r* und *a* sind also antiproportional. **Aufgabe**: Fülle die leeren Fächer auf und suche die Formel.

Parabel: a	0,5	1	2	3	4	5
Kreis: r	1	0,5	0,25			

Bestätige die Formel $r = \dfrac{1}{2 \cdot a}$.

2) Newtons **erster** Traum unter dem Apfelbaum und der Krümmungskreis der Wurfparabel

Der Legende nach sah *Newton* einen vom Wind *waagerecht* abgerissenen Apfel zu Boden fliegen. Der Apfel fliegt längs einer *Parabel* und am *Scheitel* sieht diese Parabel wie ein *Kreis* aus. Newton hatte die Parabel selbst entdeckt, niemand kannte sie zuvor, doch jetzt träumte er vom Kreis.



Wurfparabel:
Wird der Apfel vom Wind mit der Geschwindigkeit v abgerissen, dann bewegt er sich gemäß $x = v \cdot t$ in x-Richtung.
Nach unten wirkt die Schwerkraft. Hing der Apfel in der Höhe h, so fällt er gemäß $y = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + h$ nach unten. Umformen von $x = v \cdot t \;\Rightarrow\; t = x / v$.

Einsetzen in $y = -½\, g\, t^2 + h$ ergibt die Bahnkurve: $y = -\dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{x}{v}\right)^2 + h$ bzw. $\boxed{y = -\dfrac{g}{2\,v^2} \cdot x^2 + h}$

Beispiel: Der Apfel hängt in $h = 5\,m$ Höhe und wird mit $v = 3\,m/s$ abgerissen. Setzten wir wieder $g = 10\,m/s^2$, so lautet die Gleichung seiner Flugbahn $y = -\dfrac{10}{2 \cdot 9} \cdot x^2 + 5 = -0{,}\bar{5} \cdot x^2 + 5$.

In welcher Entfernung landet der Apfel am Boden? Nullsetzen: $0 = -0{,}\bar{5} \cdot x^2 + 5$ umstellen:
$0{,}\bar{5} \cdot x^2 = 5 \;\Big|\; : 0{,}\bar{5} \;\Big|\; \sqrt{\ldots}$ ergibt $x = \pm 3$. Der Apfel landet also in $3m$ Entfernung (Siehe Abb.)

Krümmungskreis der Wurfparabel:
Welcher Kreis fügt sich passgenau in den Scheitel der Wurfparabel ein? Wie lautet der Radius des Krümmungskreises? In der Formel $r = 1 / 2 \cdot a$ ist jetzt als Koeffizient der Term von x^2

$a = \dfrac{g}{2\,v^2}$ einzusetzen. Also gilt $r = \dfrac{1}{2 \cdot a} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{2}\,v^2}{g} = \dfrac{v^2}{g}$.

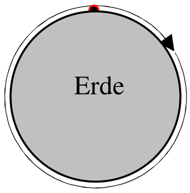
Der Radius des Krümmungskreises der Wurfparabel beträgt also $\boxed{r = \dfrac{v^2}{g}}$.

Beim obigen Beispiel mit $v = 3m/s$ und $g = 10m/s^2$ liefert $r = \dfrac{9}{10}$, also $\underline{\underline{r = 0{,}9m}}$.

Das entspricht wieder der obigen Abbildung.

3) <u>Newtons **zweiter** Traum und die **erste** kosmische Geschwindigkeit.</u>

Newton dachte sich: Wenn der Apfel derart schnell abgerissen würde, dass der Radius seines Krümmungskreises mit dem Erdradius übereinstimmt, dann würde der Apfel *nie* mehr auf dem Boden aufschlagen, sondern immer weiter um die Erde sausen. Den Erdradius $R_E \approx 6\,400\,000\,m$ kannte Newton.



Also die Formel $r = v^2 / g$ nach v^2 umstellen: $v^2 = r \cdot g$, für r den Wert 6 400 000 und für g den Wert 10 einsetzten, dann Wurzelziehen:

Also: $v = \sqrt{6\,400\,000 \cdot 10} = \sqrt{64\ 00\ 00\ 00} = 8000$. Der Apfel muss also mit $8000\,m/s$ vom Baum abgerissen werden, um *nie* mehr aufzuschlagen, um auf immer um die Erde zu kreisen. Newton konnte garnicht aufhören mit seinen Gedankenspielen. Wieviel Zeit würde der Apfel für eine Erdumkreisung brauchen? Geschwindigkeit ist Weg / Zeit. Bei einer Umkreisung ist der Weg gleich dem Erdumfang, also $s = 2\pi \cdot 6\,400\,000m = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,400\,000m \approx 40\ 000\ 000\,m$.

Die Gleichung $v = s/t$ umstellen ergibt $t = s/v = 40\ 000\ 000 / 8\ 000 = 5000s$. In 5000 Sekunden, also in 83 Minuten müsste der verrückte Apfel wieder über seinen Kopf hinweg sausen.

Newton hatte, ohne es zu wissen, die **Erste kosmische Geschwindigkeit** $\boxed{v_1 = \sqrt{g \cdot R_E}}$ ergrübelt.

Mit dieser Geschwindigkeit kehrt der „Apfel" *nicht* zum Erdboden zurück und ist insofern im „Kosmos".

Tatsächlich: Tieffliegende (Low Earth Orbit = LEO) Satelliten umkreisen die Erde mit ca. $8000\,m/s = 28\,800\,km/h$ und werden auch in etwa mit dieser Geschwindigkeit abgeschossen. Der Unterschied der potentiellen Energie auf dem Boden und im Low Earth Orbit ist nämlich vergleichsweise gering, so dass die Startgeschwindigkeit nur für die Umlaufgeschwindigkeit benötigt wird.

Das Raumfahrtzeitalter begann mit dem Sputnik. Er umkreiste die Erde in ca.96*min*, seine mittlere Höhe war 550 *km.*

Die Internationale Raumstation ISS fliegt in ca. 400*km* Höhe und hat eine Umlaufzeit von ca. 90*min*. – Eine Mindesthöhe müssen Satelliten natürlich wegen der Gebirge und der Luftreibung haben.

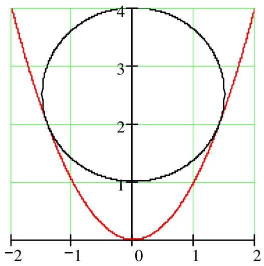
Sputnik 1

Internationale Raumstation ISS

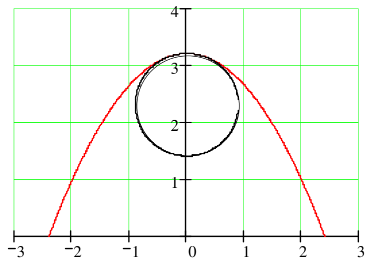
Aufgaben:

1) Für die Parabel $y = x^2$ hat der *richtige* Krümmungskreis den Radius 0,5. Um einen Kreis mit dem *falschen* Radius $r = 1,5$ einzuzeichnen, muss man den Mittelpunkt mit dem Zirkel suchen. Suche die richtige Stelle auf der *y*-Achse und ermittele die Berührpunkte.

2) Der Apfel wird mit $v = 3\,m/s$ in einer Höhe $h = 3,2\,m$ waagerecht abgerissen.
   a) Stelle die Parabelgleichung auf und zeichne den Graphen.
   b) Berechne den Radius des Krümmungskreises und zeichne ihn ein.
   c) Berechne die Aufschlagsstelle des Apfels.



zu Aufgabe 1)



zu Aufgabe 2)

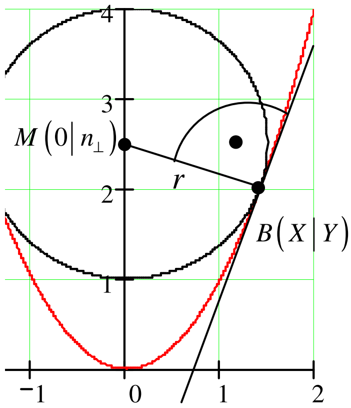
3) Der Mars hat einen Radius von etwa 3400 *km*. Der Ortsfaktor beträgt etwa $g = 3,7\,m/s^2$. Stürme gibt es auf dem Mars, wenn es dort auch Apfelbäume gäbe, mit welcher Geschwindigkeit müsste ein Apfel abgerissen werden, um nicht auf den Boden zu fallen, sondern um den Mars zu umkreisen. Zeige, dass der Apfel den Mars in ca. 100 min umkreist.

4) Was Newton wirklich träumte, das wissen wir nicht. Aber um seine Erkenntnisse zu verstehen und zu veranschaulichen, können wir uns seine Träume entsprechend vorstellen. Aufgabe: Schildere Newtons ersten und zweiten Traum mit deinen Worten.

5) Recherchiere den Sputnik. (Interessantes Referatsthema)

6) Recherchiere die ISS. (Interessantes Referatsthema)

Lösungen



1) Man kann den Mittelpunkt M des gesuchten Kreises auch *berechnen*. Sei $B\left(X\middle|Y\right)=B\left(X\middle|X^2\right)$ der Berührpunkt. Die Steigung dort ist $f'(X)=2X$. Senkrecht dazu $m_\perp=-1/m=-1/2X$. Der n-Wert der Normalen ergibt sich aus $n_\perp=Y-m_\perp\cdot X=X^2-\left(-1/2X\right)\cdot X=$ $=X^2+1/2$. Der Abstand $\overline{MB}$ muss $r=1{,}5$ sein. Also $r^2=\left(n_\perp-Y\right)^2+X^2=\left((\cancel{X^2}+1/2)-\cancel{X^2}\right)^2+X^2=1/4+X^2$.
Umstellen $X=\sqrt{1{,}5^2-0{,}25}=\sqrt{2}\Rightarrow \underline{\underline{B\left(\sqrt{2}\middle|2\right)}}$; $\underline{\underline{M\left(0\middle|2{,}5\right)}}$.

2) $v=3\,m/s$; $h=3{,}2\,m$

a) Parabelgleichung = Bahnkurve: $y=-\dfrac{g}{2v^2}\cdot x^2+h=-\dfrac{10}{2\cdot 9}\cdot x^2+3{,}2=\underline{\underline{-0{,}\bar{5}\,x^2+3{,}2}}$

b) Krümmumgskreis: $r=v^2/g=9/10=\underline{\underline{0{,}9}}$ nd zeichne ihn ein.

c) Aufschlagsstelle: $0=-0{,}\bar{5}\,x^2+3{,}2\Rightarrow x_{1,2}=\pm\underline{\underline{2{,}4}}$

3) Mars: $R_{Mars}=3\,400\,000\,m$; $g=3{,}7\,m/s^2$. $v=\sqrt{g\cdot R}\approx\underline{\underline{3547\,m/s}}$
$T=2\pi R/v\approx 6023\,s\approx\underline{\underline{100\,\text{min}}}$