A) Selbstinduktion

1) Grundlagen

In EM2, Abb.2 wurde der von einer Leiterschleife erfasste magnetische Fluss Φ durch Annäherung eines Stabmagneten *vergrößert*. Dadurch wurde ein negativ orientiertes elektrisches Ringfeld E_{ind} induziert und es floss ein negativ orientierter Induktionsstrom I_{ind}. Nun ersetzen wir den Stabmagneten durch einen Elektromagneten, der aus nur einer Schleife besteht. Die Schleife ist so an die Spannungsquelle U_{SQ} angeschlossen, dass ein positiv orientierter Strom I_{SQ} durch sie fließt. Dadurch entsteht ein Magnetfeld mit N-Pol nach oben, so, wie es beim Stabmagnet war. Der Annäherung des Stabmagneten entspricht jetzt der Erhöhung von I_{SQ} durch Spannungsvergrößerung. Nun betrachten wir keine getrennten Schleifen, sondern nur die Stromschleife mit der variablen Spannungsquelle U_{SQ} *allein*.

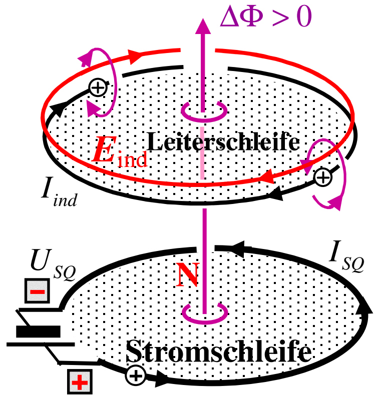

Abb. 1) Die Stromstärke wird langsam hochgefahren.

Regelt man die Spannung U_{SQ} hoch, so erhöht sich die Stromstärke I_{SQ} und $\dot{I}_{SQ} > 0$. Dadurch wachsen die Flussdichte B und der Fluss $\Phi = A \cdot B$. Der zunehmende Fluss, $\dot{\Phi} > 0$, hat zur Folge, dass ein neg. orientiertes Ringfeld E_{ind} induziert wird. Dieses Feld bewirkt einen neg. orientierten Induktionsstrom I_{ind},

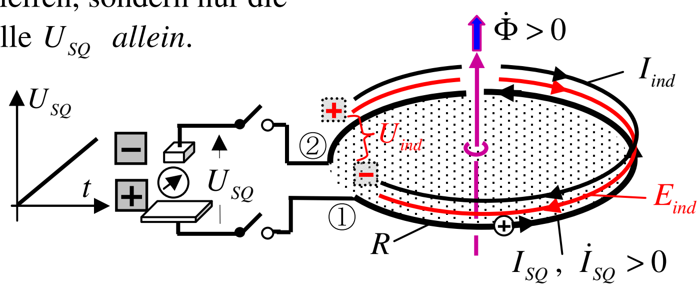

Abb 2.: Beim Hochregeln der Spannungsquelle entsteht durch Induktion eine Gegenspannung.

welcher sich dem ursprünglichen Strom I_{SQ} überlagert. Die tatsächliche Stromstärke ist daher $I = I_{SQ} + I_{ind}$. Entsprechend überlagert sich der Spannung U_{SQ} die Induktionsspannung U_{ind}, so dass zwischen den Anschlüssen ① und ② die wirksame Spannung $U = U_{SQ} + U_{ind}$ liegt.

Wie groß ist U_{ind}? Wir verallgemeinern und nehmen nun eine Spule mit n Windungen. Dann gilt $U_{ind} = -n \cdot \dot{\Phi}$. Die Flussdichte B in $\Phi = A \cdot B$ entsteht durch den Strom I in der Spule.

Gemäß Arbeitsblatt M3 gilt $B = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot n \cdot I / l$. Dann folgt $\Phi = A \cdot (\mu_r \cdot \mu_0 \cdot n \cdot I / l)$.

Bis auf die Stromstärke I sind alle Größen konstant. Also gilt $U_{ind} = -(\mu_r \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot A / l) \cdot \dot{I}$.

Die Klammer hängt nur von den geometrischen Daten der Spule ab. Sie wird mit L abgekürzt und „Selbstinduktivität" genannt. $\boxed{L = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot A / l}$. Die Windungszahl n geht quadratisch ein, weil n Wdg. den Fluss Φ n-fach verstärken und die Änderung des Flusses $\dot{\Phi}$ auch n-fach empfangen wird. Die Maßeinheit der Selbstinduktivität L heißt *Henry*. Es gilt $\boxed{H = V \cdot s / A}$.

Aus der Gleichung $U_{ind} = -n \cdot \dot{\Phi}$ wird somit die Gleichung $\boxed{U_{ind} = -L \cdot \dot{I}}$. Das wird nun in $U = U_{SQ} + U_{ind}$ eingesetzt. Der Strom durch die Spule wird durch das Ohmsche Gesetz gesteuert. Doch nun wird mit mehr U_{SQ} wirksam, sondern $U = U_{SQ} + U_{ind}$. Einsetzen von $U = R \cdot I$ und $U_{ind} = -L \cdot \dot{I}$ ergibt $\boxed{R \cdot I = U_{SQ} - L \cdot \dot{I}}$. Was bedeutet das? Der momentane Wert (der Ist-Wert) des Stromes I und die Änderung pro Zeit, also die erste Ableitung $\dot{I}$, müssen immer, multipliziert mit R, bzw. L, den Spannungswert der Spannungsquelle ergeben: $R \cdot I + L \cdot \dot{I} = U_{SQ}$.

Aufgabe: Berechne die Selbstinduktivität L einer Luftspule mit $l = 40\,cm; n = 1000; d = 15\,cm$.
Lösung: $L = 0{,}056\,H$.

Welche Auswirkungen hat die Selbstinduktion in der Praxis? Beispiele:

2) <u>Ein- und Abschaltvorgänge</u>

a) <u>Vorabversuch.</u>

Zwei Lampen L_1 und L_2 werden einmal über einen Ohmschen Widerstand R und einmal über eine Induktivität L parallel zu einer Spannungsquelle geschaltet. R wird so eingeregelt, dass beide Lampen bei geschlossenem Schalter S gleich hell leuchten. Öffnet man den Schalter, so leuchtet L_2 nach, schließt man ihn wieder, so hinkt L_2 hinterher. Während des Ein-und Ausschaltens mindert bzw. verstärkt U_{ind} demnach die Spannung U der Spannungsquelle.

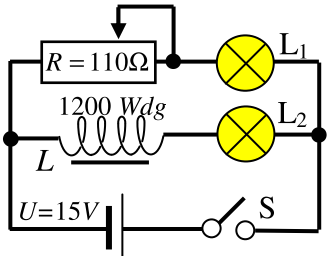

Abb 3)

<u>Ergebnis: Der Einschaltstrom wird verzögert, der Ausschaltstrom läuft nach.</u>

b) <u>Zeitlicher Verlauf des Ein- und Ausschaltstromes, Formeln.</u>

Wir verwenden eine Spule mit der Selbstinduktivität $L = 500\,H$. Der Spulendraht hat auch einen Widerstand, er beträgt $R = 280\Omega$. Die beiden Eigenschaften dieser *realen* Spule lassen sich trennen, wenn wir sie als Reihenschaltung eines reinen Widerstandes mit nur R und ohne L und einer idealen Spule mit nur L und ohne R ansehen. Solche *Ersatzschaltungen* werden in der Elektrotechnik häufig genutzt, um komplizierte Sachverhalte aufzulösen.

Wird der Schalter S in Abb. 4) aus der Neutralstellung in die Stellung ① geschaltet, so überlagert sich die in der Spule induzierte Spannung $U_L = -L \cdot \dot{I}$ der Spannung $\bar{U}$ der Spannungsquelle und wir haben wie oben für den durch R fließenden Strom die Formel $R \cdot I = \bar{U} - L \cdot \dot{I}$.

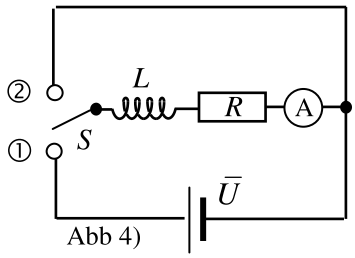

Abb 4)

Während die Spannung $U(t)$ beim Einschalten schlagartig von null auf $\bar{U}$ springt, schleppt sich die Stromstärke nur langsam auf ihren Endwert. Nach geraumer Zeit ändert sie sich nicht mehr und wenn sie sich nicht ändert, dann ist ihre Ableitung null. Also gilt ganz zum Schluss $\dot{I} = 0$ und aus $R \cdot I = \bar{U} - L \cdot \dot{I}$ wird dann $R \cdot I = \bar{U}$. Die Stromstärke I beträgt daher am Ende des Prozesses $\bar{I} = \bar{U} / R$.

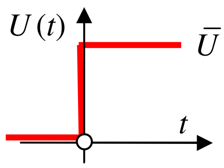

Abb 5) Spannungsverlauf

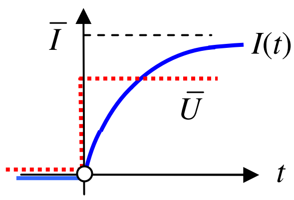

Abb 6) Stromverlauf

<u>Abschalten:</u> Jetzt wird der Schalter aus der Stellung ① in die Stellung ② geschaltet. Die Spannung der Spannungsquelle fällt schlagartig von $\bar{U}$ auf null. Der Strom hat noch den Anfangswert $\bar{I} = \bar{U} / R$ und fällt langsam zum Endwert null ab.

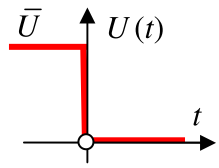

Abb 7) Spannungsverlauf

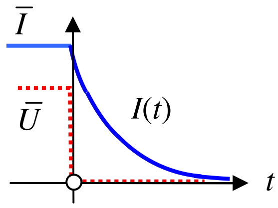

Abb 8) Stromverlauf

Man sieht: Die Stromstärke folgt einer abnehmenden e-Funktion. Also machen wir den Ansatz $I(t) = a \cdot e^{-b \cdot t}$. Einsetzen von $t = 0$ ergibt $I(0) = \bar{I} = a \cdot 1$. Also gilt gleich $a = \bar{I}$. Wie groß aber ist der Wert von b? Ummittelbar nach dem Ausschalten, wird U schlagartig null. Also wird aus der Gleichung $R \cdot I = \bar{U} - L \cdot \dot{I}$ für diesen Zeitpunkt $R \cdot \bar{I} = -L \cdot \dot{I}(0)$.

Also wissen wir, wie groß die Anfangssteigung, bzw. die anfängliche Stromabnahme ist. Es gilt $\dot{I}(0) = -R \cdot \bar{I} / L$. Für die Anfangssteigung liefert aber auch der Ansatz $I(t) = \bar{I} \cdot e^{-b \cdot t}$ einen Wert. Die Kettenregel liefert $\dot{I}(t) = -b \cdot \bar{I} \cdot e^{-b \cdot t}$. Einsetzen von $t = 0$ ergibt $\dot{I}(0) = -b \cdot \bar{I} \cdot 1$, also $\dot{I}(0) = -b \cdot \bar{I}$. Das mit $\dot{I}(0) = -R \cdot \bar{I} / L$ gleichsetzen ergibt $b = R / L$.

Beim Abschalten haben wir also den Stromverlauf $I(t) = \bar{I} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$ bzw. $\boxed{I(t) = \frac{\bar{U}}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}$

Beim Anschalten haben wir auch einen exponentiellen Stromverlauf, nur dass die Stromstärke $I(t)$ nun vom Wert null langsam auf den Wert $\bar{I} = \bar{U}/R$ ansteigt.

Die Anschalt-Gleichung lautet $\boxed{I(t) = \frac{\bar{U}}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)}$.

Halbwertzeit.

Die Frage lautet: Nach welcher Zeit t_H ist die Stromstärke $I(t)$ von ihrem Anfangswert $\bar{I} = \bar{U}/R$ auf den halben Wert $0{,}5 \cdot \bar{I} = 0{,}5 \cdot \bar{U}/R$ beim Ausschalten gesunken bzw. beim Einschalten gestiegen? Abb 9) zeigt, dass die Halbwertzeit beim Abschalten und Einschalten gleich ist, wenn die Bedingungen passen. Einfachheitshalber betrachten wir nur das Abschalten. Dann ist zu fordern $0{,}5 \cdot \bar{I} = \bar{I} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t_H}$. Kürzen durch $\bar{I}$ und logarithmieren ergibt

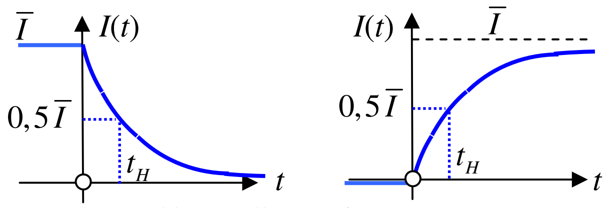

Abb 9) Halbwertzeit

$\ln 0{,}5 = -\frac{R}{L} \cdot t_H$. Weil $\ln 0{,}5 = -\ln 2$ ist, ergibt sich $\boxed{t_H = \frac{L}{R} \cdot \ln 2}$.

Beispiel: Berechne die Halbwertzeit t_H für eine reale Spule $L = 500\,H$ und $R = 280\Omega$ beim Ein- bzw. Ausschaltvorgang.

Lösung: $t_H = \frac{500\,H}{280\,\Omega} \cdot \ln 2 = 1{,}238 \frac{H}{\Omega}$.

Maßeinheitenbetrachtung: Aus der Formel $U_L = -L \cdot \dot{I}$ ergibt sich $L = -\frac{U_L}{\dot{I}}$.

U hat die Maßeinheit V . $\dot{I} = \Delta I / \Delta t$ hat die Maßeinheit A/s . Also hat L die Maßeinheit $Henry = V \cdot s / A$, das wurde oben schon erwähnt. Die Maßeinheit Ω des Widerstandes R ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz $R = U/I$ zu $\Omega = V/A$. Damit ergibt sich für den Quotient $\frac{H}{\Omega} = \frac{V \cdot s}{A} \cdot \frac{A}{V}$ die Maßeinheit s = Sekunde, wie es sein muss. Ergebn. $t_H = 1{,}238\,s$.

3) Die **ideale** Spule mit Widerstand $R = 0\,\Omega$.

Die Beziehung zwischen der von der Spannungsquelle kommenden Spannung U_{SQ} und die Strom I, der dann durch die Spule fließt lautet grundsätzlich $R \cdot I = U_{SQ} - L \cdot \dot{I}$. Da die eingespeiste Spannung U_{SQ} jetzt in U_L und der Strom durch die Spule in I_L umbenannt. Die Grundgleichung lautet dann $\boxed{R \cdot I_L = U_L - L \cdot \dot{I}_L}$. Für $R = 0\Omega$ vereinfacht sich diese Gleichung zu $0 = U_L - L \cdot \dot{I}_L$ bzw. zu $U_L = L \cdot \dot{I}_L$. Hier kommt es häufig zu Verwechselungen: Während für die im *Inneren* der Spule erzeugte induzierte Spannung stets $U_{ind} = -L \cdot \dot{I}$ gilt, haben wir für den Spezialfall $R = 0$ für die von *Außen* kommende Spannung und der Stromänderung die Beziehung $U_L = +L \cdot \dot{I}_L$.

Diese Gleichung hat eine Analogie zum Ohmschen Gesetz $U = R \cdot I$, denn dieses Gesetz ermöglicht es, aus der Batteriespannung auf die Stromstärke zu schließen. Es gilt $I = U/R$. Das ist hier ähnlich. Doch erhält man zunächst nicht I sondern nur $\dot{I}$. Genauer $\dot{I}_L = U_L / L$. Um aus dem Verlauf der angelegten Spannung auf den durch die Spule fließenden Strom zu schließen, muss man noch integrieren: $\boxed{I_L(t) = (1/L) \cdot \int U_L(t)\,dt}$.

Hat $U_L(t)$ zum Beispiel den konstanten Wert $U_L(t) = U_0$, so folgt mit $I_L = (1/L) \cdot \int U_0 \, dt = (U_0 / L) \cdot t$ eine linear ansteigende Stromstärke. Warum ist das so? Die Spule hat keinen Widerstand, $R = 0$, hätte sie auch keine Induktivität, wäre also auch $L = 0$, so käme es zum Kurzschluss. Die Stromstärke würde momentan von null auf „unendlich" steigen. Diesen rasanten Anstieg hemmt jedoch die Induktivität, welche der Stromänderung entgegen wirkt.
So entsteht der „Kompromiss" ein linearer, kontrollierter Stromanstieg.

a) Die ideale Spule mit $R = 0\,\Omega$ im Wechselstromkreis.

In der 10. Klasse hat man den Kurvenverlauf der trigonometrischen Funktionen gelernt. Beim Sinus hatte man $y = a \sin(bx + c) + d$. Die Konstanten *c* und *d* bewirken Verschiebungen in *x*- und *y*-Richtung. Das brauchen wir z.Z. nicht. *a* steht für die Schwingungsweite = Amplitude und *b* ändert die Anzahl der Schwingungen. In der Physik schreibt man für *b* den griechischen Buchstaben ω (klein omega). ω heißt „Kreisfrequenz" und es gilt $\omega = 2\pi \cdot f$ mit *f* = Frequenz = Anz. der Schwingungen pro Sekunde oder $\omega = 2\pi / T$ mit $T = 1/f$ = Schwingungsdauer.

In der Physik ist es üblich, die Amplitude mit ^ zu kennzeichnen. Eine sinusförmige Wechselspannung mit Ampl. $\hat{U}$ und Kreisfrequenz ω genügt dann also der Gl. $U_L(t) = \hat{U} \sin(\omega t)$.

Die Kurve beginnt bei $t = 0$ mit dem Wert $U_L(t) = 0$. Für $t = T$ muss wieder null heraus kommen: $U_L(T) = \hat{U} \sin(\omega T) =$

$$= \hat{U} \sin\left(\frac{2\pi}{\cancel{T}} \cdot \cancel{T}\right) = \hat{U} \sin(2\pi) = 0 \quad \checkmark$$

Für diesen Spannungsverlauf erhält man nun durch Integration $I_L(t) = (1/L) \cdot \int U_L(t)\, dt$.

Wegen $\int \sin(\omega t)\, dt = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t)$ erhalten wir

$$I_L(t) = -\frac{\hat{U}}{\omega L} \cdot \cos(\omega t)$$

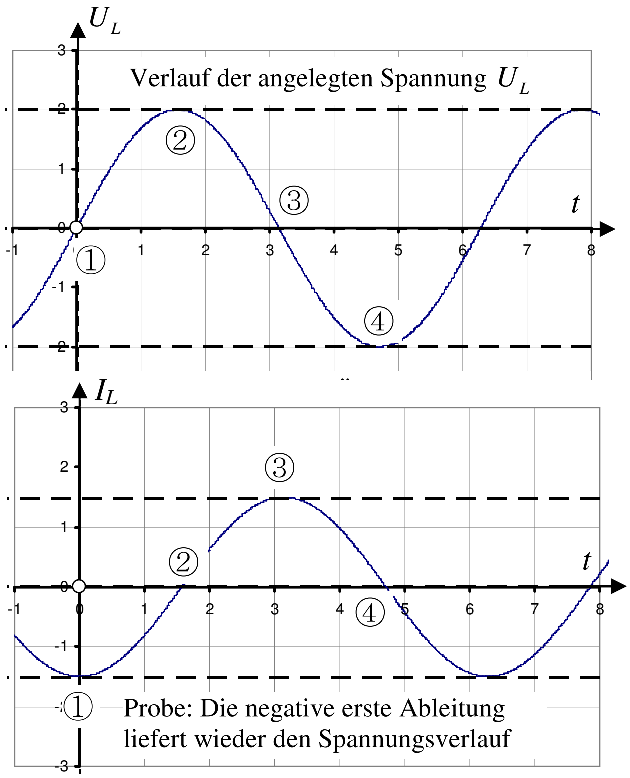

Abb 10.: Spannung und Strom an einer Leiterschleife mit $R = 0\,\Omega$

Was bedeutet das für die Leistung *P* bzw. Energieaufnahme?

Für die Leistung gilt $P = U \cdot I$. Also muss man die Spannungs- und Stromkurve mit einander multiplizieren. Das Ergebnis zeigt, dass $P(t)$ rhythmisch in die Schleife hinein- und wieder heraus fließt. Im Mittel ist die Leistungsaufnahme somit **null**.

Ergebnis: Eine ideale Spule mit $R = 0\,\Omega$ verbraucht im Mittel *keine* Energie, die Leistungsaufnahme bzw. -abgabe ist im Mittel null.

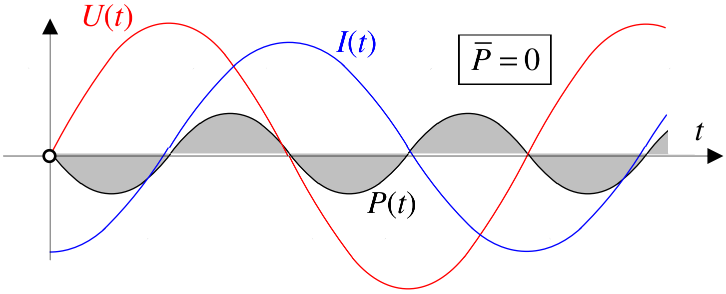

Abb 11.: Der zeitliche Mittelwert der Leistung ist null