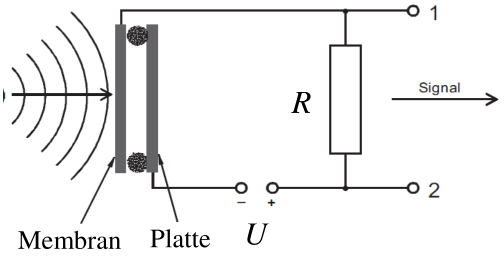
1) Aufgabe: Kondensatormikrophon.

Mikrophone wandeln Schallwellen in elektrische Signale um. Das dynamische Mikrophon nutzt die elektromagnetische Induktion, das Kohlemikrophon nutzt den variablen Ohmschen Widerstand von Kohlestaub, das Piezomikrophon nutzt den Piezoeffekt von Kristallen.
Hier wird das Kondensatormikrophon behandelt. Es findet im HiFi-Bereich Anwendung, aber auch, weil es sehr klein gebaut werden kann, in Mobiltelefonen und Hörgeräten.

Unser Kondensatormikrophon überträgt Frequenz hochwertig bis zu $f = 20\,kHz$.

Technische Daten:
Radius der kreisförmigen Membran: $r = 6\,mm$.
Plattenabstand in Ruhemodus: $d_0 = 1\,mm$.
Maximale Membraneindrückung: 60% von d_0
Betriebspannung: $U = 1{,}5\,V$.
Arbeitswiderstand: $R = 2\,M\Omega$.



a) Berechne die Kapazität C_0 des Kondensators im Ruhemodus.
Bestimme die auffließende Ladung Q_0.

b) Berechne die Feldstärke E zwischen den Platten.

c) Für die HiFi Qualität ist es wesentlich, dass die Ladung wesentlich schneller auffließt, als die Schwingsdauer T der zu übertragenden Maximalfrequenz.
Berechne die Halbwertszeit t_H der Aufladung,
vergleiche mit einem *Viertel* der Schwingsdauer T.

d) Der maximale Schalldruck verkleinert den Plattenabstandes um 60% des ursprünglichen Wertes. Bestimme den minimalen Plattenabstand d_1.
Errechne die Kapazität C_1 und die beim Plattenabstand d_1 auffließende Ladung Q_1
Berechne die Ladungsänderung $\Delta Q = Q_1 - Q_0$.

e) Die beiden Kondensatorplatten ziehen sich gegenseitig an.
Ab einer Anziehungskraft von $0{,}2\,\mu N$ besteht die Berührungs- und Kurzschlussgefahr.
Beurteile die Situation.

f) Die Ladung ΔQ fließt während einer viertel Schwingungsperiode $\Delta t = T/4$ auf bzw. ab.
Berechne die mittlere Stromstärke $I = \Delta Q / \Delta t$, sowie die am Arbeitswiderstand R abfallende Spannung U, welche zum Verstärker weiter geleitet wird.

Lösung

a) Der Flächeninhalt der Membran beträgt $A = r^2 \cdot \pi = 1{,}131 \cdot 10^{-4}\,m^2$.
Dann folgt $C_0 = \varepsilon_0 \cdot A / d_0 = \underline{\underline{1{,}001\,pF}}$ und $Q_0 = C_0 \cdot U = \underline{\underline{1{,}502\,pC}}$

b) Die gefragte Feldstärke ist die *beider* Platten, also die „Verdopplung“. Man erhält sie entweder durch die Formel $E = 2 \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_0}{2 \cdot A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_0}{A}$ oder durch die Formel $E = \frac{U}{d_0}$.
Beide male kommt $E = \underline{\underline{1500\,V/m}}$ heraus.

c) Die minimale Schwingungsdauer tritt bei der maximalen Frequenz $f = 20\,kHz$ auf.
Sie beträgt $T = 1/f = 50\,\mu s$. Ein Viertel davon ist $T/4 = \underline{\underline{12{,}5\,\mu s}}$.
Diese Zeit ist etwa 9 mal größer als die Halbwertzeit $t_H = R \cdot C \cdot \ln 2 = \underline{\underline{1{,}388\,\mu s}}$.

d) Bei maximalem Schalldruck geht der Plattenabstand auf 40% von d_0 zurück.

Der Abstand beträgt dann $d_1 = 0,4\,mm$.

Daraus folgt $C_1 = \varepsilon_0 \cdot A / d_1 = \underline{\underline{2,503\,pF}}$ und $Q_1 = C_1 \cdot U = \underline{\underline{3,755\,pC}}$.

Die Abstandsverkleinerung wird also von dem Ladungszufluss

$\Delta Q = Q_1 - Q_0 = 3,755\,pC - 1,502\,pC = \underline{\underline{2,253\,pC}}$ begleitet.

e) Die Anziehungskraft F_{el} ist diejenige Kraft, welche *eine* Platte (als Probeladung) im Feld der *anderen* Platte (als felderzeugende Ladung) erfährt.

Hier darf also nur die Feldstärke $E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{2 \cdot A}$ *einer* mit Q_1 geladener Platte und *nicht* die „Verdoppelung" angesetzt werden.

Es gilt $F_{el} = Q_1 \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1^2}{2 \cdot A} = 7,041 \cdot 10^{-9}\,N = \underline{\underline{7,041\,nN}}$.

Die kritische Anziehungskraft beträgt laut Angabe $F_{kritisch} = 0,2\,\mu N = 200\,nN$.

Sie ist also etwa 28 mal so groß und wird bei weitem nicht erreicht.

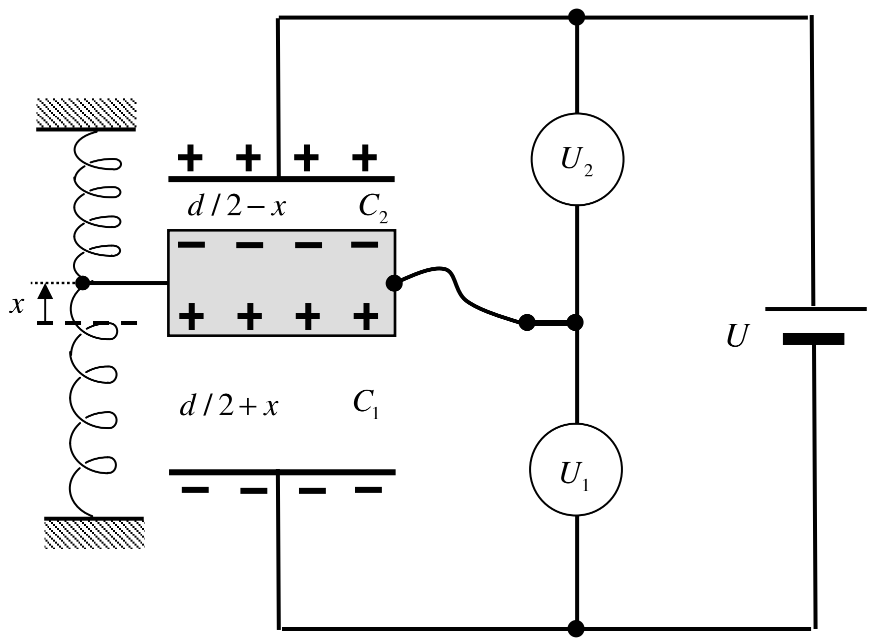
f) Während der Zeit $\Delta t = T/4 = 12,5\,\mu s = 12,5 \cdot 10^{-6}\,s$ ändert sich der Ladezustand des Kondensators nach Aufg. d) um $\Delta Q = 2,253\,pC = 2,253 \cdot 10^{-12}\,C$.

Deshalb fließt der mittlere Strom $I = \Delta Q / \Delta t = \underline{\underline{180,25 \cdot 10^{-9}\,A}}$ durch den Widerstand *R*.

Nach dem Ohmschen Gesetz „fallen" dadurch $U = R \cdot I = \underline{\underline{0,36\,V}}$ am Widerstand *R* ab.

2) <u>Aufgabe: Kapazitiver Beschleunigungssensor</u>

Unser kapazitiver Beschleunigungssensor besteht aus einem Kondensator, zwischen dessen beiden feststehenden Platten eine bewegliche Metallplatte eingebracht ist. Alle Oberflächen sollen den gleichen Flächeninhalt *A* besitzen. Die bewegliche Zwischenplatte besitzt eine Masse *m.* Sie ist elastisch an zwei Federn aufgehängt. Die gemeinsame Federkonstante ist *D*.
Ist der Sensor unbeschleunigt, so ist die Auslenkung *x* der beweglichen Masse aus der Ruhelage gleich *null* und die Masse befindet sich in der Mitte zwischen den festen Platten mit jeweils einem Abstand $d/2$ zu diesen. Die Abb. zeigt eine Situation, in welcher der Sensor nach unten beschleunigt wird. Dadurch wird die Masse um eine gewisse Streck *x* nach oben ausgelenkt und die beiden Abstände zu den festen Platten betragen dann $d/2 + x$ und $d/2 - x$.
Die erforderliche Dämpfung wird hier nicht berücksichtigt.



Aufgaben

a) Begründe, inwiefern die Auslenkung x der *beweglichen* Masse zur Beschleunigungsanzeige genutzt werden kann.

Technische Daten:
Der gemeinsame Flächeninhalt A aller Platte beträgt $A = 1{,}13 \cdot 10^{-3} m^2$.
Der Abstand der feststehenden Platten beträgt (ohne die beweglichen Masse) $d = 8\,mm$.
Betrachte zunächst die Beschleunigungsauslenkung $x = 1\,mm$.
Die Betriebsspannung beträgt $U = 4V$.

Der Sensor stellt eine *Reihenschaltung* von zwei Kondensatoren C_1 und C_2 dar.

b) Bestimme für die Mittelstellung $x = 0$ die Kapazitäten $C_1 = C_2$ der Kondensatoren.
Berechne die Gesamtkapazität C der Reihenschaltung.
Der Gesamtwiderstand R einer Reihenschaltung von $R_1 = R_2$ ergibt $R = 2 \cdot R_1$.
Die Gesamtkapazität C einer Reihenschaltung von $C_1 = C_2$ ergibt $C = 0{,}5 \cdot C_1$. Begründe.

c) Bestimme für den angegebenen Auslenkungswert $x = 1\,mm$ die Plattenabstände $d_1 = d/2 + x$ und $d_2 = d/2 - x$ und berechne die beiden Kapazitäten C_1 und C_2.
Gib das Verhältnis $C_1 : C_2$ an und vergleiche dieses begründet mit dem Verhältnis $d_1 : d_2$.

$\boxed{\triangleright}$ Mit dem Wert $x = 1\,mm$ wird ab jetzt weiter gerechnet.

d) Berechne die Gesamtkapazität C der Reihenschaltung von C_1 und C_2.
Vergleiche das Resultat mit dem Wert der Gesamtkapazität C aus Aufgabe b).
Begründe, warum die Gesamtkapazität C unabhängig von der Auslenkung x ist.

e) Die auf die Platten auffließende Ladungsmenge Q ist unabh. von x. Berechne den Wert.
In der Abbildung tragen alle vier Oberflächen symbolische die gleiche Anzahl von positiven bzw. negativen Ladungen. Gemäß Abb. gilt also $Q_1 = Q_2 = Q$. *Begründe* die Richtigkeit.

f) In C_1 und C_2 herrscht die gleiche Feldstärke E. Begründe dies und berechne den Wert.

g) Die bewegliche Masse wird sowohl von der oberen, als auch von der unteren festen Platte angezogen. Begründe, dass die Kräfte gleich groß sind und sich somit aufheben.

h) Berechne die Teilspannungen U_1 und U_2 mittels $U_1 = E \cdot d_1$ und $U_2 = E \cdot d_2$.
Begründe, dass die beiden Kondensatoren eine Spannungsteilung der Gesamtspannung U bewirken.

i) Für die Auslenkung $x = 1\,mm$ gilt $d_1 = 5\,mm$ und $d_2 = 3\,mm$, sodass das Verhältnis $\frac{d_2}{d_1} = \frac{3}{5} = 0{,}6$ beträgt. Vergleiche dieses Resultat mit dem Verhältnis $\frac{U_2}{U_1}$

j) Es ist klar, dass die Teilspannungen U_1 und U_2 Funktionen der Auslenkung x sind.
Die Formeln lauten $U_1(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{d}\right) \cdot U$ und $U_2(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{d}\right) \cdot U$.
Bestätige, dass die Ergebnisse von h) diese Formeln erfüllen.

k) Die Masse m der unterliegt der Trägheitskraft $F_{Tr} = m \cdot a$ mit der Beschleunigung a.
Die Feder unterliegt der Rückstellkraft $F_D = -D \cdot x$.
Gleichsetzen liefert für die Beschleunigung $a = -(D/m) \cdot x$.
Erläutere, wie der Beschleunigungssensor funktioniert.

Lösung

a) Die Masse *m* setzt der Beschleunigung *a* die Trägheitskraft $F_{tr} = m \cdot a$ entgegen. Durch die Federkraft $F_D = -D \cdot x$ wird diese ausgeglichen. Darum folgt $a = -(D/m) \cdot x$, also $a \sim x$.

b) Für $x = 0$ gilt $d_1 = d_2 = 4\,mm$. Also $C_1 = C_2 = \varepsilon_0 \cdot A / d_1 = \underline{\underline{2{,}501\,pF}}$.
Reihenschaltung: Gesamtkap.: $1/C = 1/C_1 + 1/C_2 = 2/C_1 = 2 \cdot d_1 / \varepsilon_0 \cdot A = d / \varepsilon_0 \cdot A$.
Bilde den Kehrwert: $C = \varepsilon_0 \cdot A / d$ Die Gesamtkap. enthält also den vollen Abstand im *Nenner*:
„Multipliziert mit dem Doppelten ergibt beim Widerstand das Doppelte“.
„Geteilt durch das Doppelte ergibt beim Kondensator die Hälfte“: $C = \varepsilon_0 \cdot A / d = \underline{\underline{1{,}251\,pF}}$

c) $x = 1\,mm$: $d_1 = 5\,mm$, $d_2 = 3\,mm$. Folgt $C_1 = \varepsilon_0 \cdot A / d_1 = \underline{\underline{2{,}001\,pF}}$, $C_2 = \varepsilon_0 \cdot A / d_2 = \underline{\underline{3{,}335\,pF}}$.
$C_1 : C_2 = 3 : 5 = 0{,}6$; $d_1 : d_2 = 5 : 3 = 1{,}\overline{6}$. Die *d*-Werte stehen im Nenner der *C*-Formeln.

d) $1/C = 1/C_1 + 1/C_2 = 4{,}9975 \cdot 10^{11} + 2{,}9985 \cdot 10^{11} = 7{,}996 \cdot 10^{11}$. Also $C = \underline{\underline{1{,}251 \cdot 10^{-12}\,F}}$.
Das Ergebnis hat sich gegenüber Aufg. b) *nicht* geändert. Für die Gesamtkapazität *C* der Reihenschaltung zählt immer nur die Summe $d = d_1 + d_2$ von C_1 und C_2 und die bleibt bei festen äußeren Platten konstant, egal, welchen Wert die Auslenkung *x* hat.

e) Die Ladung ergibt sich aus $Q = C \cdot U$ zu $Q = \underline{\underline{5{,}003 \cdot 10^{-12}\,Coulomb}}$.
Da C und damit auch Q unabhängig von der Auslenkung *x* ist, sitzen auf den äußeren Platten definitiv die Ladungen $\pm Q = \pm 5{,}003\,pC$. Durch <u>Influenz</u> sammeln sich dann auf den inneren Platten ebenfalls die Ladungen $\pm Q = \pm 5{,}003\,pC$. Grundsätzlich tragen zwei in Reihe geschalteten Kondensatoren die *gleiche* Ladung (nämlich die der Gesamtkap.), auch wenn $C_1 \neq C_2$.

f) In C_1 und C_2 sitzen die gleichen Ladungsmengen. Von „jeder Ladung geht eine Feldlinie aus“. Also enthalten die Felder gleich viele Feldlinien, also sind Feldliniendichten und somit auch die Feldstärken gleich. Die Feldlinien sind nur unterschiedlich lang. Auch in der Formel für *E* kommt nur Q, nicht aber *d* vor. Da wir hier nicht die eine Platte im Feld der anderen betrachten, sondern das Feld *beider* Platten, gilt $E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} = \underline{\underline{500\,\mathrm{V}/m}}$.

g) Anziehungskraft: Betrachtet die eine Platte im Feld $E = 1/\varepsilon_0 \cdot (Q/\boxed{2} \cdot A)$ der anderen.
Auch hier kommt es nur auf die Anzahl und nicht auf die Länge der Feldlinien an. In der Formel für *E* und F_{el} kommt *d* nicht vor. Aus $F_{el} = Q \cdot E$ folgt $F_{1,2} = 1/\varepsilon_0 \cdot (Q^2 / 2 \cdot A) = \underline{\underline{1{,}251\,nN}}$.

h) $U_1 = E \cdot d_1 = \underline{\underline{2{,}5\,V}}$ und $U_2 = E \cdot d_2 = \underline{\underline{1{,}5\,V}}$.
Die Gesamtspannung $U = 4\,V$ wird durch die Reihenschaltung in zwei Teile geteilt.

i) Die Aufteilung der Spannungen $U_2 / U_1 = 1{,}5 / 2{,}5 = 0{,}6$ erfolgt also im gleichen Verhältnis wie das Verhältnis der Abstände $d_2 / d_1 = 3/5 = 0{,}6$ und reziprok zum Verhältnis $C_2 / C_1 = 1{,}\overline{6}$ der Kapazitäten.

j) Einsetzen: $U_1(1mm) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) \cdot 4\,V = \underline{\underline{2{,}5\,V}}$, $U_2(1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \cdot 4\,V = \underline{\underline{1{,}5\,V}}$.

k) Einsetzen von $x = -\left(m/D\right) \cdot a$ ergibt z.B. $U_2(x) = \frac{U}{2} + \frac{m \cdot U}{d \cdot D} \cdot a$.
Justiert man die Nullstellung des Voltmeters auf $U/2$, so ist die Spannungsanzeige direkt proportional zur Beschleunigung.