

1) Anziehungskraft zweier gegengleich geladener Platten.

Das Coulombsches Kraftgesetz für zwei Ladungen Q_1 und Q_2 erhält man dadurch, (siehe $\boxed{\text{E1}}$) dass man **beliebig** *eine* Ladung als „felderzeugende" Ladung und die *andere* Ladung als „Probeladung" wählt. In Abb.1 wird Q_2 als *Probeladung* in das *Feld* von Q_1 gesetzt. Q_2 „sieht" also *nicht* das Dipolfeld $\mathbf{E}$ (Abb.2), sondern *nur* das Radialfeld E von Q_1. Das Dipolfeld von Q_1 *und* Q_2 wird erst durch eine *weitere* Probeladung q gesehen. Q_2, wie auch jede andere Ladung, sieht *sich selbst* nicht.

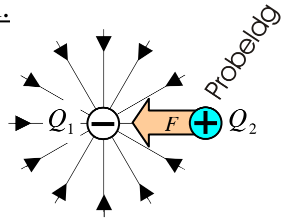


Abb.1 $E(Q_1)$

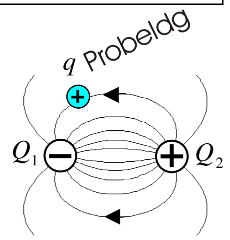


Abb. 2 $\mathbf{E}(Q_1,Q_2)$

Diese Überlegung übertragen wir jetzt auf zwei einander gegenüberstehende mit $Q_1 = -Q$ und $Q_2 = +Q$ geladene *Platten*. In Abb.3 wählen wir Q_1 als *felderzeugende* Ladung und Q_2 als *Probeladung*. Q_2 sieht dann *nur* das Feld von Q_1, *nicht* aber das Summenfeld gem. Abb.6. Nach $\boxed{\text{E2}}$ ist die Feldstärke einer *einzelnen* mit Q geladenen Platte $E(Q) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{2 \cdot A}$. Welche Kraft F_{el} erfährt Q_2 im Feld von Q_1?

Allg. gilt $F_{el} = q \cdot E$. Mit $q = Q_2$ und $E = E(Q_1)$ folgt für die nach *unten* gerichtete Kraft dann $F_{el} = +Q \cdot \left(-\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{2 \cdot A} \right) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot A}$.

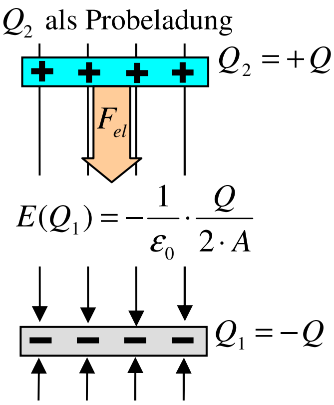


Abb.3 $E(Q_1)$

2) Trennarbeit zweier gegengleich geladener Platten.

In Abb. 3 sind $E(Q_1) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{2 \cdot A}$ und $F_{el} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot A}$ *konstant.*

Die obere Platte befinde sich *anfangs* bei $x \approx 0$ sehr dicht über der unteren Platte. Um die Plattendistanz d zu erreichen, wird die obere Platte mit der *konstanten* äußeren Kraft $F_{ä} = +\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot A}$ gegen die elektrische Anziehungskraft F_{el} um die Strecke d emporgezogen.

Dabei wird die Arbeit $W = F_{ä} \cdot d = \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot A} \right) \cdot d$ verrichtet.

Ergebnis: Die Trennarbeit beträgt $\boxed{W = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2 \cdot d}{2 \cdot A}}$. (Formel 1) .

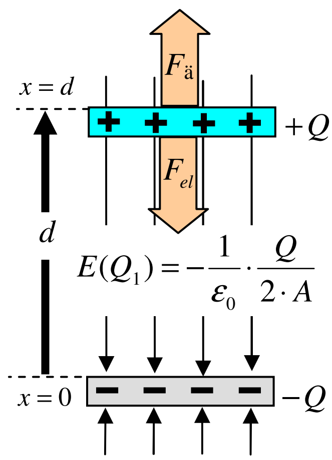


Abb.4 $E(Q_1)$

3) Die Situation nach der Plattentrennung entspricht der Aufladung mit einer Spannungsquelle.

Nachdem die obere Platte empor gezogen wurde, wird sie im Abstand d von der unteren Platte fixiert. Auf diese Weise hat man einen mit $\pm Q$ geladenen Kondensator mit Flächeninhalt A und Plattenabstand d.
Für eine Probeladung q zwischen den Platten

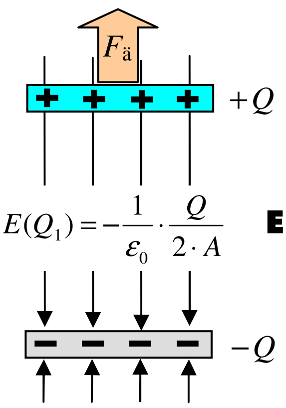


Abb. 5 $E(Q_1)$

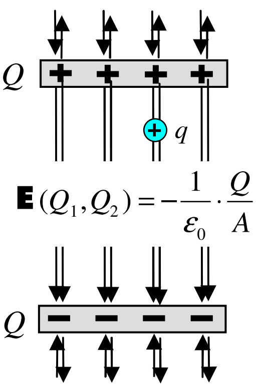


Abb. 6 $\mathbf{E}(Q_1,Q_2)$

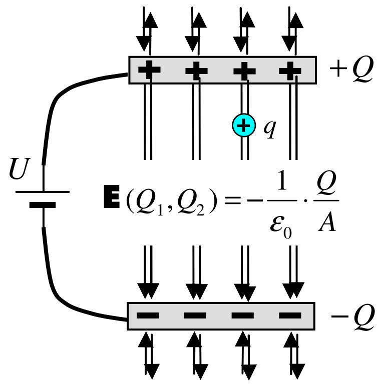


Abb. 7 $\mathbf{E}(Q_1,Q_2)$

ist es dann unwesentlich, wie der Aufbau des Kondensators zustande gekommen ist. Die Probeladung befindet sich einfach in dem Feld zweier gegengleich geladener Platten, deren Feldstärke sich *außerhalb aufhebt* und *dazwischen verdoppelt*. Zwischen den Platten beträgt die Feldstärke dann $\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{A}$. Exakt das gleiche Ergebnis ergibt sich, wenn die beiden bereits zuvor im Abstand d befindlichen Platten per Spannungsquelle U mit $\pm Q$ aufgeladen werden. Im Nachhinein lässt sich die Situation von Abb. 6 und Abb. 7 *nicht* unterscheiden.

4) Energieinhalt des Kondensators

Löst man die Fixierung der oberen Platte, so schnellt diese durch die Anziehungskraft F_{el} sofort wieder auf die untere Platte zu. Bei *festgehaltenem* Plattenabstand wird die verrichtete Trennarbeit $W = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2 \cdot d}{2 \cdot A}$ daher zu einer *potentiellen* Energie. Diese potentielle Energie nennt man auch „Energieinhalt des Kondensators". Wie oben gezeigt, gibt es zwei Möglichkeiten für den Kondensator. Erstens: Die bereits mit $\pm Q$ geladenen Platten werden auf die Distanz d auseinander gezogen. Zweitens: Die bereits auf Distanz d befindlichen Platten werden durch eine Spannungsquelle U mit $\pm Q$ aufgeladen. Wegen dieser Gleichheit dürfen wir die Ladung Q in der „Ladungstrennungsformel" $W = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2 \cdot d}{2 \cdot A}$ auch als aufgeflossen ansehen und somit für Q den Ausdruck $Q = C \cdot U$ einsetzen. Jetzt gibt es einen Rechentrick: Man schreibt das Q^2 als $Q \cdot Q$ und ersetzt nur ein Q durch $C \cdot U$ und lässt das andere Q stehen. Dann hat man $Q^2 = C \cdot U \cdot Q$. Nun wird für die Kapazität C noch $C = \varepsilon_0 \cdot A / d$ eingesetzt:

Dann folgt $Q^2 = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d} \cdot U \cdot Q$. Dies nun in $W = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2 \cdot d}{2 \cdot A}$ einsetzen ergibt

$W = \frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}} \cdot \left(\frac{\cancel{\varepsilon_0} \cdot \cancel{A}}{\cancel{d}} \cdot U \cdot Q \right) \cdot \frac{\cancel{d}}{2 \cdot \cancel{A}}$. Insgesamt bleibt nur $W = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U$ (Formel 2) übrig.

Ergebnis: Ob Plattentrennung oder Aufladung, der Energieinhalt beträgt $\boxed{W = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U}$ (2)

Frage: Aus der Perspektive der Plattentrennung ist es verwunderlich, dass in (Formel 2) die Wegstrecke d fehlt, obwohl W natürlich von d abhängt. Warum fehlt d in (Formel 2) ?
Antwort: Der Abstand d steckt in der Spannung U. Zieht man die mit $\pm Q$ geladenen Platten auseinander, so „entsteht" die Spannung erst. Das Auseinanderziehen ist eine *Ladungstrennung* und eine Vorrichtung zur Ladungstrennung heißt *Spannungsquelle*. Ein Voltmeter zwischen den Platten zeigt, wie die Spannung U proportional zur Vergrößerung von d ansteigt.

5) Feldenergie, Energiedichte des elektrischen Feldes.

Ob mechanisch getrennt oder per Spannungsquelle aufgeladen, *außerhalb* der Platten heben sich die Feldstärken auf und *zwischen* den Platten herrscht die „Verdoppelung" $\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{A}$.

Umstellen von $\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{A}$ nach Q ergibt $Q = \varepsilon_0 \cdot A \cdot \mathbf{E}$. Dies in (Formel 1) einsetzen:

$W_{el} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{d}{2 \cdot A} \cdot Q^2 = \frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}} \cdot \frac{d}{2 \cdot \cancel{A}} \cdot \left(\varepsilon_0^{\cancel{2}} \cdot A^{\cancel{2}} \cdot \mathbf{E}^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}^2 \cdot A \cdot d$. Nun ist $A \cdot d = V$ das Volumen des *felderfüllten Raumes* zwischen den Platten. Also gilt $W_{el} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}^2 \cdot V$

Teilen durch V liefert die Energiedichte ρ_{el} = „Energie pro Volumen“ $\boxed{\rho_{el} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}^2}$.

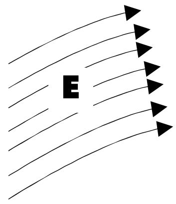
<u>Aufgabe</u>: Ein Plattenkondensator mit $A = 2\,m^2$ und $d = 1\,\mu m$ wird an eine Spannungsquelle $U = 1000\,V$ angeschlossen.

<u>Berechne</u> a) Die Kapazität C, b) die auffließende Ladung $\pm Q$, c) die Feldstärke $\mathbf{E}$ zwischen den Platten, d) die Energiedichte ρ_{el} , e) die Energie W_{el} des elektrischen Feldes.

<u>Lösung:</u> a) $C = 20{,}12\,\mu F$, b) $Q = 20{,}12\,mC$,
c) $E = 10^9\ V/m$, d) $\rho_{el} = 5{,}03 \cdot 10^6\,J/m^3$, e) $W_{el} = 10{,}06\,J$.

<u>Bemerkung:</u> Die Formel $\rho_{el} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}^2$ für die Energiedichte des elektrischen Feldes im Vakuum erinnert an die Formel $W = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$ einer gespannten Feder.

Der Vergleich legt nahe, dass das Vakuum durch das elektrische Feld ebenfalls in eine Art von „Spannungszustand“ versetzt wird und dass die elektrische Feldkonstante ε_0 die „Federkonstante des Vakuums“ ist. Z.B. sehen die Feldlinien zwischen einem Plus- und Minuspol tatsächlich aus wie gespannte Gummibänder.
Sie wollen den Abstand zwischen den Polen verkleinern.



6) <u>Hilfe der Kraftformel lässt sich ε_0 experimentell bestimmen.</u>

Wir betrachten einen Experimentier-Kondensator dessen Platten durch eine Spannungsquelle U mit $\pm Q$ aufgeladen wurden. Die obere Platte ist beweglich und wird somit nach Abschn. 1) mit der Kraft $F_{el} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot A}$ nach unten gezogen. Dieses mal ersetzen wir *beide* Faktoren von Q^2 durch $Q = C \cdot U = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d} \cdot U$. Dann folgt $F_{el} = -\frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}} \cdot \left(\frac{\varepsilon_0^{\cancel{2}} \cdot A^{\cancel{2}}}{d^2} \cdot U^2 \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \cancel{A}} = -\frac{\varepsilon_0 \cdot A \cdot U^2}{2 \cdot d^2}$.

Damit die obere Platte nicht bei Aufladung auf die untere Platte „klatscht“, wird sie mit einem Newtonmeter, also mit einer Spiralfeder der Federkonstante D festgehalten. Die Kraft F_D des Newtonmeters kompensiert dann die elektrische Anziehung. Also gilt $F_D = -F_{el}$. Damit kann man am Newtonmeter gemäß $F_D = +\frac{\varepsilon_0 \cdot A \cdot U^2}{2 \cdot d^2}$ die Anziehungskraft ablesen.

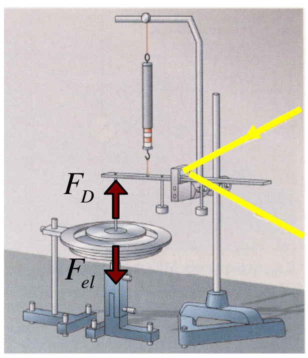
Umstellen nach ε_0 liefert mit $\varepsilon_0 = \frac{2 \cdot d^2 \cdot F_D}{A \cdot U^2}$ eine Formel zur experimentellen Bestimmung der elektrischen Feldkonstanten ε_0 .

Experiment:

Als Kondensator werden zwei kreisförmige Platten mit $r = 7{,}5\,cm$ durch die Federkraft F_D im konstanten Abstand $d = 1{,}3\,cm$ gehalten. Die Messung erfolgt für mehrere Spannungswerte.

U/kV	2,5	3,4	3,9
F/mN	3	6	8
$\varepsilon_0/10^{-12}$	9,2	9,9	10

$$\varepsilon_0 = \frac{2 \cdot d^2 \cdot F_D}{A \cdot U^2}$$



Laser-strahl zur Ab-stands-kon-trolle

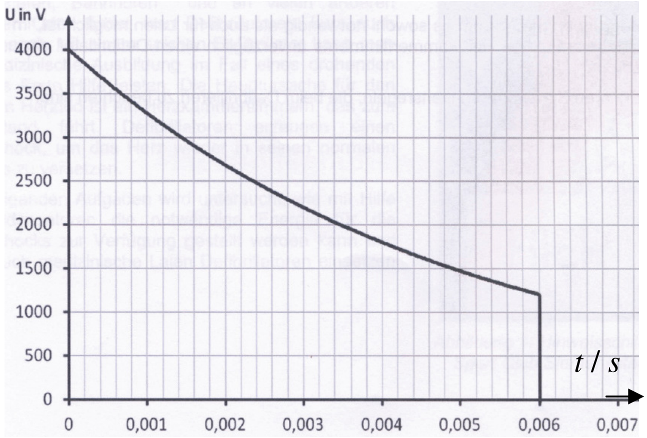
Experimentelles Ergebnis: $\varepsilon_0 \approx 9{,}5 \cdot 10^{-12}\,As/Vm$.

Tabellenergebnis: $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,As/Vm$

Aufgabe

An öffentlichen Orten findet man Defibrillatoren, um bei plötzlichem Herzstillstand einer Person Erste Hilfe leisten zu können.
Der Defibrillator erzeugt einen Elektroschock, um das Herz wieder in seinen normalen Rhythmus zu versetzen.
Dabei darf der Schock für erwachsenen Patienten maximal die Energie $W_{max} = 360\,J$ während der Dauer $\Delta t = 10\,ms$ übertragen.
Die Energie bezieht der Schocker aus einem Kondensator $C = 50\,\mu F$, der mit maximal $U = 4\,000\,V$ aufgeladen werden darf.
Der menschliche Körper stellt dem Stromimpuls einem Widerstand von $R = 100\,\Omega$ zwischen den beiden Elektroden entgegen.
Üblicherweise trifft der Notarzt nach ca. 8 Minuten ein.

a) Bestimme für den Kondensator Q u. W_{el}.
b) Berechne die Halbwertzeit t_H der Kondensatorentladung über den Körperwiderstand und vergleiche mit der Schockdauer Δt.
c) Bestimme die Ladespannung U, damit der Kondensator $W = 300\,J$ speichert.
d) In der nebenstehenden Abb. ist der Spannungsverlauf eines Elektroschocks von $\Delta t = 6\,ms$ Dauer dargestellt. Beurteile, ob das zuläs. $W_{max} = 360\,J$ überschritten wird.



Lösung

a) Die aufgenommene Ladung Q ergibt sich aus der Kondensatorformel
$Q = C \cdot U = 50 \cdot 10^{-6} F \cdot 4000V = \underline{\underline{0,2\,C}}$.
Die gespeicherte Energie erhält man durch $W = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot 0,2\,C \cdot 4000V = \underline{\underline{400\,J}}$

b) Die Halbwertzeit t_H einer Kondensatorentladung über einen Widerstand erhält man durch die Formel $t_H = R \cdot C \cdot \ln 2 = 100\,\Omega \cdot 50 \cdot 10^{-6} F \cdot \ln 2 = \underline{\underline{3,466\,ms}}$. Das bleibt unter der zulässigen Schockdauer von $\Delta t = 10\,ms$.

c) Gegeben ist $W = 300J$. Gesucht ist die Spannung *U*. In der Energieformel $W = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U$ muss daher die Ladung *Q* ersetzt werden. Einsetzen von $Q = C \cdot U$ ergibt $W = \frac{1}{2} \cdot (C \cdot U) \cdot U$ bzw. $\boxed{W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2}$. Diese Formel nach *U* umstellen: $U = \sqrt{\frac{2 \cdot W}{C}}$ ergibt $\underline{\underline{U = 3464V}}$.

d) Wie in Aufgabe a) bereits berechnet, beträgt der Energieinhalt des Kondensators anfangs $W_1 = 400\,J$. Nach $6\,ms$ ist die Spannung laut Graphik auf etwas $U_2 \approx 1250\,V$ abgesackt. Daher beträgt der Energieeinhalt dann $W_2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 10^{-6} F \cdot (1250V)^2 = 39,063\,J$. Der Kondensator hat also $W_1 - W_2 = 360,94\,J$ abgegeben und liegt damit fast genau auf dem zulässigen Maximalenergie von $W = 360\,J$.