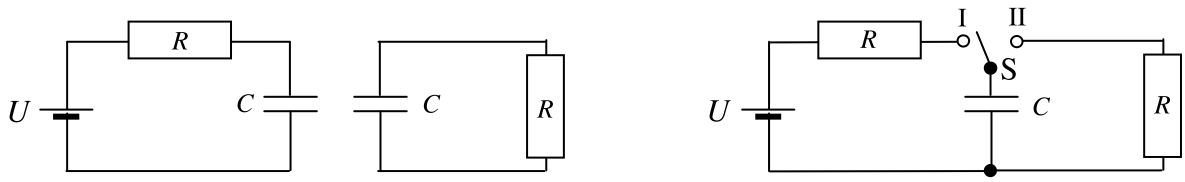


1) Auf- und Entladung eines Kondensators über einen Widerstand.

Ein Kondensator besteht aus zwei einander gegenüber stehenden Metallplatten. Werden diese an den Plus- bzw. den Minuspol einer Gleichspannungsquelle angeschlossen, so verteilen sich die getrennten Ladungen blitzschnell von den Polen der Spannungsquelle über die Adern bis auf die Platten. Die Platten erhalten dann die Ladungen $\pm Q$. Abkürzend sagt man: „Der Kondensator wird mit Q aufgeladen“. Die Geschwindigkeit der Aufladung ist enorm und kann die Spannungsquelle an ihre Leistungsgrenze bringen.
Um erstens eine Zerstörung zu verhindern und zweitens die langsamere Aufladung technisch zu nutzen, fügt man einen ohmschen Widerstand R in eine der Adern ein. Man könnte auch beide Zuleitungen mit Widerständen versehen. Doch das bringt nichts: In einem Stromkreis bestimmt der *Gesamt*widerstand die Stromstärke und der Gesamtwiderstand ist die Summe der Einzelwiderstände. Z.B. bringen zwei 100Ω Widerstände in den beiden Adern genauso viel, wie ein 200Ω Widerstand in einer Ader.

Wir betrachten drei Schaltungen:
In Schaltung 1 wird ein *ungeladener* Kondensator C über einen Widerstand R *auf*geladen.
In Schaltung 2 wird ein *geladener* Kondensator C über einen Widerstand R *ent*laden.
In Schaltung 3 wird der Kondensator C in Schalterstellung (I) auf- und in (II) entladen.



Schaltung 1 Schaltung 2 Schaltung 3

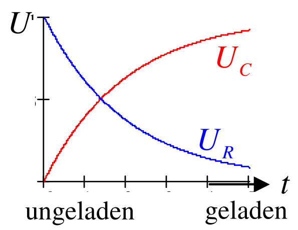
Am Geschicktesten ist es, Schaltung 3 aufzubauen, weil diese Schltg. 1 und 2 in sich vereint.

Schaltung 1 ist eine *Reihenschaltung* von R und C und somit ein *Spannungsteiler*. Die konstante Spannung U der Spannungsquelle teilt sich auf in die Spannung U_R am Widerstand und die Spannung U_C am Kondensator. Also gilt $U = U_R + U_C$. Allgemein ist es am Spannungsteiler so, dass der größere Widerstand den größeren und der kleinere Widerstand den kleineren Spannungsanteil erhält. Hätten wir z.B. $U = 10V$ und zwei Widerstände $R_1 = 2\Omega$ und $R_2 = 3\Omega$ in Reihe, so müssten wir die $10V$ in $2+3=5$ Teile aufteilen. Ein Teil betrüge dann $2V$.
R_1 bekäme dann 2 Teile, also $U_1 = 4V$ und R_2 bekäme 3 Teile, also $U_2 = 6V$.

Hier ist es entsprechend, doch müssen wir beachten, dass der Widerstand des Kondensators von seinem Ladezustand abhängt. Ein leerer Kondensator wird schnell geladen, er lässt einen großen Ladestrom fließen. Großer Strom heißt kleiner Widerstand. Also: Im ungeladenen Zustand ist der Widerstand des Kondensators winzig, ja, er ist praktisch gleich *null*.

Im geladenen Zustand ist der Kondensator voll, sodass kein weiterer Ladestrom mehr fließt. Der Kondensator wirkt jetzt wie eine Leitungsunterbrechung. D.h.: Im geladenen Zustand ist der Widerstand des Kondensators gleich *unendlich*.

Auch die RC- Reihenschaltung ist ein Spannungsteiler. Wie verteilt sich die Spannung hier? Im ungeladenen Zustand gilt $R_{ges} = R + 0 = R$.
Also bekommt R alles und C nichts: $U_R = U$ und $U_C = 0$.
Im geladenen Zustand gilt $R_{ges} = R + \infty = \infty$. Da aber jeder endliche Wert R „nichts“ gegenüber unendlich ist, bekommt R jetzt nichts und C bekommt alles: $U_R = 0$ und $U_C = U$.
Die Abb. zeigt, wie U_R von U auf null sinkt und U_C von null auf U steigt.



Spannungsverlauf bei der RC- Reihenschaltung

<u>Schaltung 2</u> ist eine *Parallelschaltung* von Widerstand R und Kondensator C. Der Kondensator soll <u>anfangs</u> durch die Spannung U mit der Ladung Q aufgeladen sein. Daher gilt $U_C = U$.
Bei Parallelschaltung stimmen die Spannungen überein, also gilt $U_R = U_C = U$.

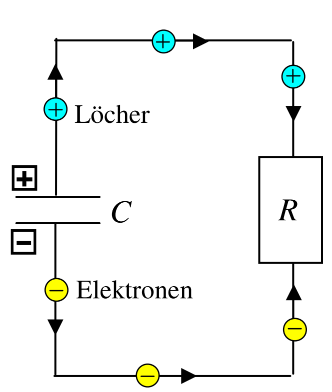
Was wird geschehen?

a) Der Kondensator wird sich über den Widerstand entladen, sodass die Spannung am Widerstand und Kondensator *gleichzeitig* gegen *null* gehen. Es gilt ja $U_R = U_C$.

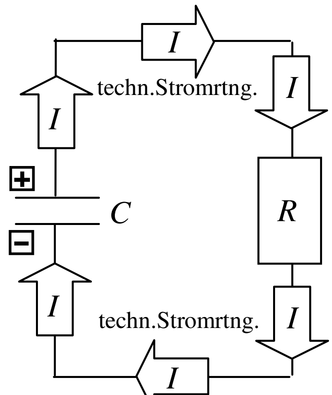
b) Aus einem größeren Kondensator muss mehr Ladung abfließen. Das beansprucht mehr Zeit.

c) Ein größerer Widerstand bremst die Entladung. Die Entladung braucht ebenfalls mehr Zeit.

d) <u>Der tatsächliche Stromkreis</u>.
Auf der Minusplatte des Kondensators herrscht Elektronenüberschuss, dort gibt es frei bewegliche Elektronen. Auf der Plusseite herrscht Elektronenmangel, dort gibt es frei bewegliche Löcher. Elektronen und Löcher wandern parallel zueinander durch die Adern und rekombinieren im Widerstand.



Stromkreis: Wie er wirklich ist.



Stromkreis: techn. Stromrichtng

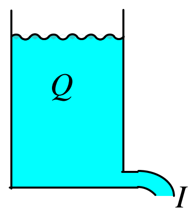
Der <u>technische Stromkreis</u> beschreibt die Ladungsbewegung ausschließlich durch gedanklich *positive* Ladungsträger. Daher laufen die Löcher *in Richtung* des technischen Stromes und die Elektronen *gegen die Richtung* des technischen Stromes.

(i) Die techn. Stromrichtung wurde mit positiven Ladungsträgern definiert, weil auch die Richtung des elektrischen Feldes mit einer **positiven** Probeladung festgelegt wurde.

(ii) Erst durch die technische Stromrichtung stellt sich die Bewegung der Ladungsträger insgesamt als „*Strom<u>kreis</u>*“ da.

Im Weiteren verwenden wir die technische Stromrichtung.
Die rechte Abb. zeigt sehr gut, dass die Stromstärke I in einem Stromkreis überall gleich groß ist. Der Grund: Nirgends können Ladungsträger zur Seite abfließen. Daher stimmt auch die Stromstärke im Kondensator mit der im Widerstand überein. Es gilt: $I_R = I_C = I$

e) Der Kondensator mit der Kapazität C wurde an die Spannungsquelle mit der Spannung U angeschlossen. Daher hat er die Ladung $Q = C \cdot U$ aufgenommen.
<u>Frage</u>: Wie hängen Ladung und Stromstärke zusammen?
Wir betrachten ein Wassergefäß mit Ausfluss und sehen sofort: Je größer die Ausflussgeschwindigkeit, desto schneller *sinkt* der Wasserspiegel. Die Ausflussgeschwindigkeit entspricht also der *negativen* Änderung der Wassermenge.



Das Wasser entspricht der Ladung Q und die Ausflussgeschwindigkeit entspricht der Stromstärke I. Der Vergleich zeigt: $I = -\Delta Q / \Delta t$. Da der Grenzwert von $\Delta Q / \Delta t$ gleich der *ersten Ableitung* nach der Zeit ist, haben wir $I = -\dot{Q}$.
Bem.: Bei zeitlicher Ableitung schreibt man nicht f', sondern $\dot{f}$. Sprich „f Punkt“.

f) <u>Jetzt haben wir alle Formeln zusammen, um die Entladungskurve *berechnen* zu können.</u>

Unsere Formeln lauten:

(1) $U_R = U_C = U$ (2) $I_R = I_C = I$ (3) Ohmsches Gesetz $U_R = I_R \cdot R$

(4) Kondensatorformel $U_C = Q / C$ (5) Ladung und Stromstärke $I = -\dot{Q}$.

Wir starten mit (1) $U_R = U_C$ und setzen (3) $U_R = I_R \cdot R$ und (4) $U_C = Q / C$ ein.
Dann entsteht $I_R \cdot R = Q / C$. Mit $I_R = I$ ergibt sich $I \cdot R = Q / C$.

Diese Gleichung wird nach der Zeit abgeleitet (Schreibweise $\dot{f}$). Da R und C konstant sind, folgt $\dot{I} \cdot R = \dot{Q} / C$. Einsetzen von $\dot{Q} = -I$ führt auf $\dot{I} \cdot R = -I / C$.

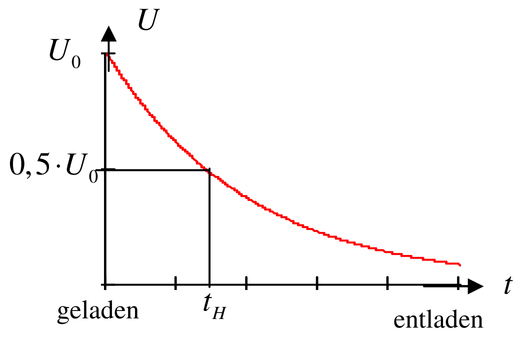
Nun wird durch R geteilt, um alle Konstanten auf einer Seite zu haben: $\dot{I} = -\frac{1}{R \cdot C} I$.

Jetzt wird die Abkürzung $1/R \cdot C = b$ eingeführt. Die letzte Gleichung lautet dann $\dot{I}(t) = -b \cdot I(t)$, denn der Stromstärkenverlauf $I(t)$ ist ja eine Funktion der Zeit t.
Wie kann man diese Gleichung lösen? Wir übertragen sie in die Mathematik und setzen für $I(t)$ die Funktion $f(x)$ ein und für $\dot{I}(t)$ die Ableitung $f'(x)$. Wählen wir als Bsp. $b = 2$.
Dann geht unsere physikalische Gleichung $\dot{I}(t) = -b \cdot I(t)$ über in die mathematische Gleichung $f'(x) = -2 \cdot f(x)$. Gesucht ist also eine Funktion $f(x)$, deren Ableitung $f'(x)$ die Funktion selbst ist, multipliziert mit -2.
Wir können diese Gleichung nur durch Raten lösen:
<u>Versuch (1):</u> $f(x) = x^2$. Dann folgt $f'(x) = 2x$. Überprüfe, ob $f'(x) = -2 \cdot f(x)$ stimmt: $2\cancel{x} = -2 \cdot x^{\cancel{2}}$. Das stimmt nur für $x = 0$. Es muss aber für alle x stimmen. Also *falsch*.
<u>Versuch (2):</u> $f(x) = e^x$. Dann folgt $f'(x) = e^x$. Überprüfe, ob $f'(x) = -2 \cdot f(x)$ stimmt: $\cancel{e^x} = -2 \cdot \cancel{e^x}$ bzw. $1 = -2$. Das ist zwar immer noch falsch, aber schon besser.
<u>Versuch (3):</u> $f(x) = e^{-x}$. Dann folgt $f'(x) = -e^{-x}$. Überprüfe, ob $f'(x) = -2 \cdot f(x)$ stimmt: $-\cancel{e^{-x}} = -2 \cdot \cancel{e^{-x}}$ bzw. $-1 = -2$. Das ist auch noch falsch, aber doch etwas besser.
<u>Versuch (4):</u> $f(x) = e^{-2x}$. Dann folgt $f'(x) = -2 \cdot e^{-2x}$. Überprüfe, ob $f'(x) = -2 \cdot f(x)$ stimmt: $-2 \cdot \cancel{e^{-2x}} = -2 \cdot \cancel{e^{-2x}}$ bzw. $-2 = -2$. Es stimmt.
Die Gleichung $f'(x) = -b \cdot f(x)$ hat entsprechend die Lösung $f(x) = e^{-bx}$.
Aber auch $f(x) = a \cdot e^{-bx}$ ist eine Lösung. Probe: Setze $f'(x) = -b \cdot a \cdot e^{-bx}$ in $f'(x) = -b \cdot f(x)$ ein: $-b \cdot a \cdot e^{-bx} = -b \cdot a \cdot e^{-bx}$. Alles kürzt sich weg, also richtig.

Damit kehren wir zurück zu der physikalischen Gleichung $\dot{I}(t) = -b \cdot I(t)$ und kennen nun ihre Lösung $I(t) = a \cdot e^{-b \cdot t}$. Die Größe b ist die obige Abkürzung $b = 1/\ R \cdot C$. Die noch unbekannte Größe a erhalten wir durch Einsetzen des Anfangszeitpunktes $t = 0$. Wegen $e^{-b \cdot 0} = e^0 = 1$ ergibt sich $I(0) = a \cdot 1$. $I(0)$ ist aber die Anfangsstromstärke I_0. Also $a = I_0$.
Damit lautet die Entladungskurve $\boxed{I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}}$. Analog gilt $\boxed{U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}}$
<u>Aufgabe</u>:
Geg.: $U_0 = 10V$, $R = 1M\Omega$; $C = 1\mu F$. Ges: Berechne $U(t = 2s)$

Lsg.: $U(2s) = 10V \cdot e^{-\frac{2s}{10^6 \Omega \cdot 10^{-6} F}} = 10V \cdot e^{-2} = \underline{\underline{1,35V}}$. Maßeinheit: Ohm$\cdot$ Farad$=$Sekunde

<u>Die Halbwertszeit</u>
Bei der Entladung des Kondensators C über den Widerstand R sinkt die Spannung gleichmäßig auf null.
<u>Frage</u>: Zu welchem Zeitpunkt t_H ist U auf die *Hälfte* $U_0/2$ abgesunken? Einsetzen $\cancel{U_0}/2 = \cancel{U_0} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t_H}$ und Logarithmieren ergibt $\ln\frac{1}{2} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot t_H$.
Wegen $\ln(1/2) = -\ln 2$ ergibt sich $\boxed{t_H = R \cdot C \cdot \ln 2}$.



<u>Bemerkung</u>: Wie oben vermutet ist die Entladungszeit proportional zu R und C.

Aufgabe

Ausschaltverzögerung

Bei Bewegungsmeldern muss der ausgelöste Vorgang nach einer bestimmten Zeit beendet werden. Zum Beispiel soll eine Lampe nach einer Minute selbständig ausgehen. Das lässt sich durch eine *RC*-Schaltung realisieren.

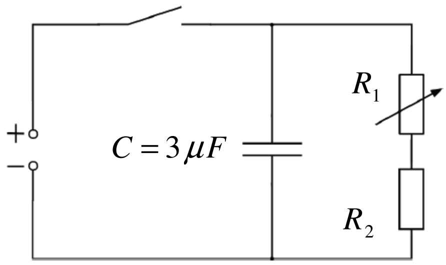
Bewegungsmelder

a) Der Kondensator hat $A = 0{,}11 m^2$, $d = 1 mm$, $\varepsilon_r = 3100$.
   Es werden $U = 10 V$ Spannung angelegt. Berechne *C* und Q.

b) Leite die Formel für die Halbwertzeit her.

c) Durch welche Änderung von *R* oder *C* lässt sich t_H verdoppeln?

d) In der nebenstehenden Schaltung wird *C* zunächst bei geschlossenem Schalter aufgeladen. Bei geöffnetem Schalter fließt die Ladung dann über $R_1 + R_2$ ab.
   Der Widerstand R_1 lässt sich zwischen dem Wert 0Ω und dem Maximalwert R_1 regeln.
   Aufgabe: Berechne R_1 und R_2 so, dass die Halbwertzeit zwischen minimal $t_H = 1 min$ und maximal $t_H = 10 min$ geregelt werden kann.



Lösung

a) Es gilt $C = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot A / d = 3{,}019 \cdot 10^{-6} F \approx \underline{\underline{3\mu F}}$. $Q = C \cdot U = 30{,}19 \cdot 10^{-6} C \approx \underline{\underline{30\mu C}}$.

b) Die Vorüberlegungen führen für die Stromentladungskurve auf die Gleichung $\dot{I} = -\dfrac{1}{R \cdot C} I$.
   Diese entspricht der mathematischen Gleichung $f'(x) = -b \cdot f(x)$.
   Probieren ergibt $f(x) = a \cdot e^{-bx}$.
   Vergleich mit der physikalischen Gleichung liefert $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$.
   Division durch *R* ergibt wegen des ohmschen Gesetzes $I / R = U$ entsprechend die Entladungskurve der Spannung $U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$

c) Die Halbwertzeit ergibt sich aus der Formel $t_H = R \cdot C \cdot \ln 2$. Eine Verdopplelung von t_H erreicht man z.B. indem man *R* verdoppelt und *C* beibehält oder umgekehrt. Neben unendlich vielen anderen Möglichkeiten kann man z.B. auch beide Größen um $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ vergrößern.

d) Die angesteuerte Lampe soll erlöschen, wenn die Spannung unter die halbe Betriebsspannung $U / 2$ abgesackt ist.
   Ist der Widerstand R_1 auf 0Ω heruntergeregelt, so beträgt der Gesamtwiderstand nur R_2.
   Für diesen Widerstand soll $t_H = 60 s$ ergeben.

   Also $R_2 = \dfrac{t_H}{C \cdot \ln 2} = \dfrac{60 s}{3 \cdot 10^{-6} F \cdot \ln(2)} = 2{,}885 \cdot 10^7 \Omega \approx \underline{\underline{28{,}9 M\Omega}}$

   Der Maximalwert von R_1 ergibt sich aus $600s = \left(R_1 + R_2\right) \cdot C \cdot \ln 2$ zu $R_1 = \dfrac{600s}{C \cdot \ln 2} - R_2$.

   Ergebnis $R_1 = 259{,}68 \cdot 10^6 \Omega \approx \underline{\underline{260 M\Omega}}$