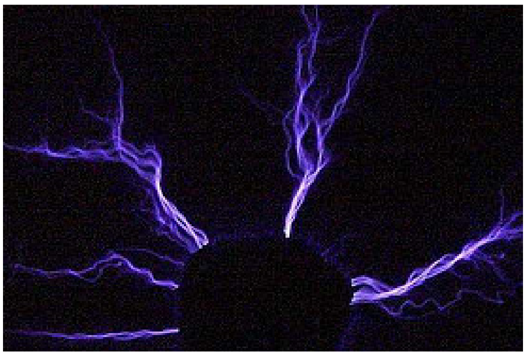
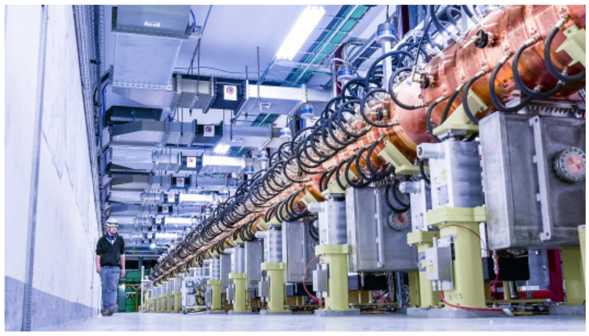


5) Linearbeschleuniger

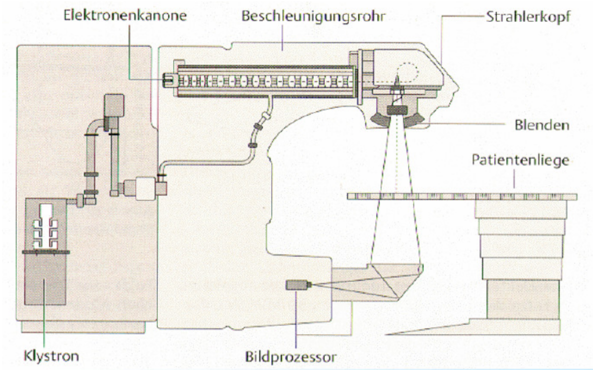
Im *Linear*beschleuniger werden geladene Teilchen durch Hochspannung beschleunigt. Einsatzgebiete sind Grundlagenforschung, Werkstoffprüfung und medizinische Radiologie. Auch in der Elektronenkanone und im Flugzeit-Massenspektrograph findet Teilchenbeschleunigung statt. Hier werden die Teilchen durch *eine* einzige Gleichspannung beschleunigt.
Bei sehr hohen Spannungen treten jedoch erhebliche Probleme auf. Es entstehen Kriechströme und per Feldemission Korona-Entladungen oder Lichtbögen.

Moderne Linearbeschleuniger bestehen deshalb aus *mehreren* Beschleunigersegmenten, die alle mit ein und demselben *unterkritischen* Hochspannungwert betrieben werden.
Es gibt Beschleuniger für Elektronen, Protonen und auch schwere Ionen.
Wir betrachten einen Protonenbeschleuniger.


Ungewollte Korona-Entladung

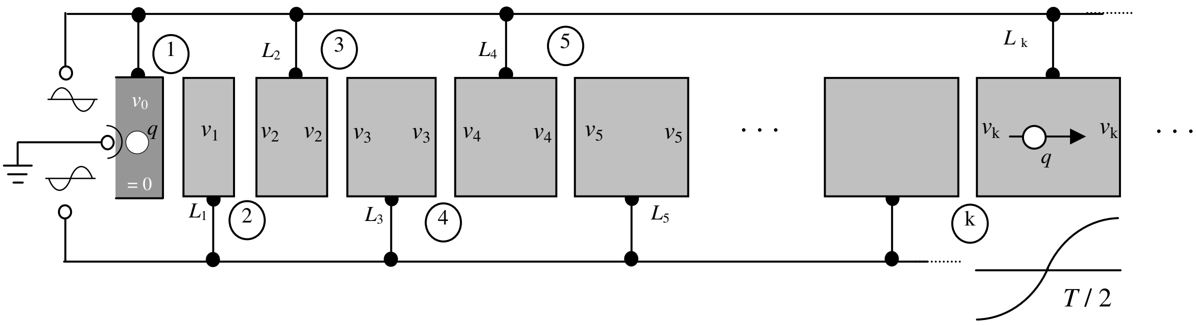

Linearbeschleuniger für Grundlagenforschung CERN


Linearbeschleuniger in der Strahlentherapie



Komponenten des Linearbeschleunigers in der Medizin

Funktionsweise:



In das Segment L_0 werden Protonen eingebracht. Ihre kinetische Energie ist noch etwa null.

Die Segmente sind abwechselnd an die Pole einer Wechselhochspannungsquelle mit der Amplitude $\hat{U}$ gelegt. In der ersten Halbperiode liegen die Segmente L_0, L_2, L_4, ... am positiven Pol. An ihnen liegt also die Spannung $+\hat{U}$.

Die Segmente L_1, L_3, L_5,… liegen während der ersten Halbperiode am negativen Pol. Sie haben also den Spannungswert $-\hat{U}$. Die Spannungsdifferenz am Schlitz ① zwischen den Segmenten L_0 und L_1 beträgt daher $2\hat{U}$. Wegen der Polarität von L_0 und L_1 werden die Protonen in ersten Halbperiode aus dem Segment L_0 hinaus gestoßen und in das Segment L_1 hineingezogen. Allgemein gewinnt eine Ladung q beim Durchlaufen einer Spannung U die elektrische Energie $w_{el} = q \cdot U$ Unsere Protonen haben die Ladung $+e$, sie durchlaufen die Spannung $2\hat{U}$. Daher gewinnen sie in dem Spalt die elektrische Energie $w_{el} = 2 \cdot e \cdot \hat{U}$. Diese Energie wandelt sich in kinetische Energie um und bewirkt Geschwindigkeitserhöhung.

Jedes Segment ist als Metallrohr ausgebildet, weshalb das Rohrinneres ein Faradayschen Käfig ist. Innerhalb des Rohres L_1 driftet das Proton daher mit der im Schlitz ① erreichten Geschwindigkeit v_1 unbeschleunigt weiter. *Während* des Durchfluges durch L_1 wird die Spannung jedoch umgepolt. Davon merkt das Proton in seinem Faradayschen Käfig aber nichts. Erst nach Erreichen des Rohrendes an Schlitz ② „stellt das Teilchen fest", dass es aus einem positiv geladenen Rohr, jetzt L_1, austritt und mit L_2 wiederum ein negatives Rohr vor sich hat. Deshalb gewinnt es im Schlitz ② erneut die kinetische Energie $w_{kin} = 2 \cdot e \cdot \hat{U}$ hinzu.

So geht es weiter und weiter. Da die Geschwindigkeit nach jedem Schlitz größer wird, die Umpolungsfrequenz aber aus technischen Gründen konstant sein muss, müssen die Driftrohre immer länger werden. Nur so befindet sich das Teilchen mit der jeweils höheren Geschwindigkeit zum richtigen Zeitpunkt am Startpunkt des nächsten Beschleunigungsschlitzes.

a) <u>Bewegungsenergie und Geschwindigkeit im k-ten Driftrohr</u>:
Wenn ein Proton in einen Schlitz eintritt, liegt am hinteren Segment stets die Spannung $+\hat{U}$ und am vorderen stets $-\hat{U}$. Die Zunahme der kinetischen Energie pro Schlitz beträgt daher $w_{kin} = 2 \cdot e \cdot \hat{U}$. Nach dem k-ten Schlitzes hat das Proton so die Energie $W_k = ½ m v_k^2 =$ $= k \cdot 2 \cdot e \cdot \hat{U}$. Umstellen nach v ergibt die Geschwindigkeit $\boxed{v_k = 2 \cdot \sqrt{k \cdot e \cdot \hat{U} / m}}$

b) <u>Länge des dem k-ten Driftrohres</u>: Wir beachtet die Grundgleichung $v = s / t$ und setzen für v die Geschwindigkeit v_k im k-ten Schlitz ein. Für s setzen wir die gesuchte Länge L_k des k-ten Segmentes ein und für t setzen wir die *halbe* Periodendauer $T/2$ ein.
So erhalten wir $v_k = L_k / (T/2) = 2 \cdot L_k / T$. Umstellen ergibt $L_k = v_k \cdot T/2$.
Einsetzen von v_k ergibt $L_k = T \cdot \sqrt{k \cdot e \cdot \hat{U} / m}$. Beachtet man noch, dass die Schwingungsdauer T der Kehrwert der Frequenz f ist, so ergibt sich $L_k = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{e \cdot \hat{U}}{m}} \cdot \sqrt{k}$.

Das erste Segment hat somit die Länge $L_1 = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{e \cdot \hat{U}}{m}}$.

Damit lässt sich die Längenformel vereinfachen: $\boxed{L_k = L_1 \cdot \sqrt{k}}$.

Die Segmentlänge ist also bestimmt durch die Betriebsdaten $\hat{U}$ und f des Beschleunigers und durch die Daten des zu beschleunigenden Teilchen, Ladung q und Masse m.
Die Längen nehmen mit der *Wurzel* aus k zu. Das vierte Segment ist also z.B. doppelt so lang wie das erste und das neunte ist dreimal so lang wie das erste.

Aufgaben

1) Recherchiere die Anwendungsbereiche des Linearbeschleunigers.
2) Beschreibe die Funktionsweise des Linearbeschleunigers und suche eine Animation.
3) Leite die Geschwindigkeitsformel $v_k = 2 \cdot \sqrt{k \cdot e \cdot \hat{U} / m}$ her.
4) Leite die Längenformeln $L_1 = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{e \cdot \hat{U}}{m}}$ und $L_k = L_1 \cdot \sqrt{k}$ her.
5) Gegeben ist die Länge des ersten Driftrohres $L_1 = 20\,cm$. Die Wechselspannung hat die Amplitude $\hat{U} = 10\,kHz$. Berechne die notwendige Frequenz f für Protonen.
6) Betrachte einen Linearbeschleuniger für Protonen mit acht Segmenten.
   Das Proton trägt die Ladung $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$. Seine Masse beträgt $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg$.
   Die Betriebsspannung hat die Amplitude $\hat{U} = 2 \cdot 10^5\,V$ und die Frequenz $f = 40\,MHz$.
   Die Schlitzbreiten betragen einheitlich $d = 2\,cm$.

a) Berechne Kraft *F* und Beschleunigung a, welche das Proton an den Schlitzen erfährt.
b) Berechne die Geschwindigkeit v_1 der Protonen im Segment Nr1.
c) Erläutere und begründe, wie sich das Proton im Rohrinneren bewegt.
d) Wie lang muss Segment 1 sein, damit das Proton zur richtigen Zeit in den Schlitz 2 eintritt.
e) Segment Nr.0 wird genauso lang gebaut wie Segment Nr.1.
   Berechne die Gesamtlänge des Beschleunigers.
   Berechne die Austrittsgeschwindigkeit der Protonen.

7) In den Formeln für die Segmentlängen unseres Linearbeschleunigers gehen die Ladung $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$ und die Masse $m = m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg$ des Protons ein.
   Deshalb sieht es zunächst so aus, als müsse für jede Teilchensorte ein neuer Beschleuniger gebaut werden. Das ist aber nicht der Fall. Durch geeignete Einstellung von Frequenz und Amplitude können auch andere Teilchen mit derselben Maschine beschleunigt werden.
   Das soll am Beispiel des Heliumkerns = α-Teilchens erarbeitet werden.
   Es gilt $q_\alpha = 2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}\,C$ und $m_\alpha = 6{,}68 \cdot 10^{-27}\,kg$.
   Berechne, wie die Spannungsamplitude $\hat{U}$ angepasst werden muss, wenn die α-Teilchen (1) mit der gleichen Frequenz und (2) mit der doppelten Frequenz durch den gleichen Linearbeschleuniger gejagt werden sollen.
   Bem.: Zu fordern ist also, dass die Rohrlängen für beide Anwendungen gleich sind.

Lösung

1) bis 4) siehe Skript
5) Allgemein gilt $v = s/t$. Die Wegstrecke s ist die Länge des ersten Driftrohres, also $s = L_1$. Diese Strecke wird während einer halben Schwingungsdauer zurückgelegt. Also $t = T/2$. Die Geschwindigkeit ist $v = v_1 = 2\cdot\sqrt{1\cdot e\cdot\hat{U}/m}$ Einsetzen: $v_1 = L_1/(T/2) = 2\cdot L_1/T \ \big|: 2\cdot L_1$ ergibt $v_1/(2\cdot L_1) = 1/T = f$, bzw. $f = 2\cdot\sqrt{e\cdot\hat{U}/m}\ /(2\cdot L_1) = (1/L_1)\cdot\sqrt{e\cdot\hat{U}/m} = \underline{\underline{4{,}9MHz}}$
6) a) Die beschleunigende Spannung ist $2\cdot\hat{U} = 4\cdot10^5V$. Die Feldstärke an den Schlitzen beträgt dann $E = U/d = 4\cdot10^5V/0{,}02m = 2\cdot10^7\,V/m$. Die Formel $F = q\cdot E$ liefert dann die Kraft $F = 1{,}6\cdot10^{-19}C\cdot\ 2\cdot10^7\,V/m = 3{,}2\cdot10^{-12}N$. $\quad C\cdot V/m = A\cdot s\cdot V/m = W\cdot s/m = J/m = N$.
Beschleunigung: $a = F/m = 3{,}2\cdot10^{-12}N/1{,}67\cdot10^{-27}kg = 1{,}916\cdot10^{15}m/s^2$. Das ist ungefähr 200 Billionen mal so viel wie die Erdbeschleunigung $g = 9{,}81m/s^2$.
Die elektrische Energie $w_{el} = 2\cdot e\cdot\hat{U}$ wird zu kinetischer Energie $w_k = ½mv_k^2$. Daraus folgt
$$v_1 = \sqrt{\frac{2\cdot w}{m_p}} = \sqrt{\frac{2\cdot2\cdot e\cdot\hat{U}}{m_p}} = 2\cdot\sqrt{\frac{e\cdot\hat{U}}{m_p}} = 8{,}755\cdot10^6m/s.$$ Nimm auch $v_1 = 2\cdot\sqrt{e\cdot\hat{U}/m}$.
c) Im Inneren des Faradayschen Käfigs herrscht Kräftefreiheit. Die Geschwindigkeit bleibt daher im Inneren des Käfigs konstant. Beschleunigung findet nur in den Schlitzen statt.
d) Bei der Frequenz $f = 40MHz$ ist eine Periodendauer $T = 1/f = 2{,}5\cdot10^{-8}s$.
Das Proton muss das erste Segment dann in der Zeit $T/2 = 1{,}25\cdot10^{-8}s$ durcheilen.
Weil die Geschwindigkeit $v_1 = 8{,}755\cdot10^6m/s$ beträgt, muss das erste Segment die Länge $L_1 = v_1\cdot(T/2) = \ = 8{,}755\cdot10^6m/s\ \cdot1{,}25\cdot10^{-8}s = 0{,}109m$, also etwa $11cm$ betragen.
Die Formel $L_1 = \dfrac{1}{f}\sqrt{\dfrac{e\cdot\hat{U}}{m}}$ liefert dasselbe.
e) Gesamtlänge:
$$L = 2\cdot L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_8 = L_1\ \cdot\left(2\cdot\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{8}\right) = 0{,}109m\cdot17{,}3 = \underline{\underline{1{,}89m}}$$
Es handelt sich also um einen kleinen Beschleuniger für Anwendungen in der Medizin oder Materialprüfung. Die Endgeschwindigkeit ergibt sich z.B. mit $k = 8$ aus der Formel
$\boxed{v_k = 2\cdot\sqrt{k\cdot e\cdot\hat{U}/m}}$ $v_8 = 24{,}8\cdot10^6m/s$. Das sind etwa 8% der Lichtgeschwindigkeit.
7) Wir betrachte die Länge des ersten Segments einmal für Teilchen mit der Ladung q_1 und der Masse m_1 und das andere mal für Teilchen mit der Ladung q_2 und der Masse m_2 und fordern Gleichheit: Dann muss also gelten: $\dfrac{1}{f_1}\sqrt{\dfrac{q_1\cdot\hat{U}_1}{m_1}} = \dfrac{1}{f_2}\sqrt{\dfrac{q_2\cdot\hat{U}_2}{m_2}}$. Da die Frequenz sich nicht ändern soll, kann sie weggekürzt werden. Quadrieren ergibt dann die Forderung $\dfrac{q_1\cdot\hat{U}_1}{m_1} = \dfrac{q_2\cdot\hat{U}_2}{m_2}$
bzw. $\hat{U}_2 = \dfrac{q_1\cdot m_2}{m_1\cdot q_2}\cdot\hat{U}_1$. Teilchen (1) ist das Proton mit $q_1 = e$; $m_1 = u$.
Teilchen (2) ist das α-Teilchen mit $q_2 = 2e$; $m_2 = 4u$. Daher folgt $\hat{U}_2 = \dfrac{e\cdot4u}{u\cdot2e}\cdot\hat{U}_1 = 2\cdot\hat{U}_1$.
Bei gleicher Frequenz kann man daher mit doppelter Spannung die α-Teilchen durch die Protonen-Anlage schießen.